

Serie  
DEMRE | N° 2

# PSU

30 de Julio de 2015



## RESOLUCIÓN MODELO DE PRUEBA MATEMÁTICA

# RESOLUCIÓN DEL MODELO DE PRUEBA DE MATEMÁTICA

## PRESENTACIÓN

En esta publicación se comentarán las preguntas que aparecen en el Modelo de Prueba de Matemática publicado el día 18 de junio del presente año, en este sitio web.

El objetivo de esta publicación es entregar información a profesores y estudiantes acerca de los temas y habilidades cognitivas que se evalúan en cada uno de los ítemes de esta prueba, de manera que sirva de retroalimentación al trabajo que realizan. Para ello, se entrega una ficha de referencia curricular de cada pregunta, explicitando el eje temático y el nivel al cual pertenece, así como también el contenido, el objetivo fundamental y la habilidad cognitiva medida, junto a la clave. Además, se entrega una propuesta de resolución de cada pregunta, señalando algunos de los errores más comunes en que incurren los postulantes al contestar las preguntas.

Este análisis ha sido elaborado por el Comité de Matemática de Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educativo (DEMRE), dependiente de la Vicerrectoría de Asuntos Académicos de la Universidad de Chile.

Registro de Propiedad Intelectual N° 255417 – 2015.  
Universidad de Chile.

Derechos reservados ©. Prohibida su reproducción total o parcial.

## COMENTARIO DE LAS PREGUNTAS

### PREGUNTA 1

$$0,1 \cdot (0,001 : 0,01) =$$

- A) 0,000001
- B) 0,001
- C) 0,01
- D) 0,1
- E) 1,0

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

**Contenido:** Operatoria con números racionales.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** C

### COMENTARIO

Esta pregunta apunta al contenido de operatoria con números racionales. Para resolverla el postulante puede hacerlo de varias maneras, una de ellas es operar directamente, es decir, de la expresión  $0,1 \cdot (0,001 : 0,01)$  obtiene  $0,1 \cdot 0,1$ , lo que da como resultado 0,01.

Otra manera de hacerlo, es transformar los números de la expresión a potencias de 10 y luego operar aplicando propiedades, o bien, transformar a fracción cada número de la expresión y luego operar.

Del cálculo anterior, se tiene que la clave es C) y el distractor que obtuvo el mayor porcentaje de preferencias fue B) con un 11% de adhesión, probablemente los postulantes que lo marcaron operaron mal en la división obteniendo  $0,1 \cdot (0,01)$ , llegando a 0,001.

### PREGUNTA 2

El número 439,915587 redondeado a la centésima es

- A) 43
- B) 44
- C) 439,91
- D) 439,92
- E) 439,9156

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

**Contenido:** Aproximación de números racionales a través del redondeo.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** D

### COMENTARIO

El contenido involucrado en este ítem es el de la aproximación de un número racional por redondeo, es decir, en el número 439,915587 se debe identificar la posición a la que se quiere redondear, en este caso, se pide a la centésima, luego se debe considerar la cifra decimal inmediatamente siguiente a la que determine la aproximación, o sea, la milésima y como este dígito es 5, el dígito por aproximar se debe aumentar en una unidad, resultando el número 439,92 que se encuentra en la opción D).

La opción C) fue el distractor más llamativo con un 12% de las preferencias, posiblemente quienes lo marcaron confundieron la aproximación por redondeo con la aproximación por truncamiento.

### PREGUNTA 3

En la recta numérica de la figura 1 se ubican los puntos a, b, c y d. ¿En cuál de las siguientes operaciones el resultado es **siempre** menor que 1?

- A)  $a \cdot b$
- B)  $d + a$
- C)  $a \cdot c$
- D)  $d - c$
- E)  $c + b$

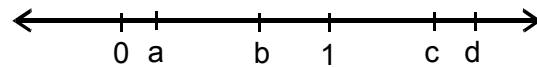


fig. 1

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

**Contenido:** Representación de números racionales en la recta numérica.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, Sintetizar y Evaluar

**Clave:** A

## COMENTARIO

Esta pregunta se puede resolver a partir del análisis de las expresiones dadas en las opciones para evaluar cuál de ellas da como resultado siempre un número menor que 1, a través de la operatoria de números racionales y su ubicación en la recta numérica.

Es así como, de la figura se puede deducir que los números  $a$  y  $b$  son mayores que 0 y menores que 1, es decir, se pueden escribir como fracción donde el numerador es menor que el denominador, por ejemplo,  $a = \frac{p}{q}$  y  $b = \frac{m}{n}$ , con  $0 < p < q$  y  $0 < m < n$ . Ahora, si se analiza la operatoria dada en la opción A) se tiene  $a \cdot b = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}$ , de donde  $pm < qn$ , pues  $p < q$  y  $m < n$ , luego  $a \cdot b$  es siempre menor que 1.

Si se analiza la expresión dada en la opción B), se tiene que  $(d + a)$  siempre es un número mayor que 1, porque  $d$  es mayor que 1 y sumado con cualquier número positivo el resultado es mayor que 1.

Ahora, en C) se tiene  $a \cdot c$  no siempre es menor que 1, por ejemplo, si  $a = \frac{1}{2}$  y  $c = 4$ , entonces  $a \cdot c = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ .

De la misma manera en D) la expresión  $(d - c)$  no siempre da como resultado un número menor que 1, por ejemplo  $8 - 4 = 4$ , donde  $d = 8$  y  $c = 4$ .

Por último, en E) se tiene que  $c + b$  siempre da un número mayor que 1, porque  $c$  es mayor que 1 y sumado con cualquier número positivo el resultado es mayor que 1.

Por el análisis realizado la clave es A) y el distractor con la mayor preferencia fue D) con un 19% de adhesión, posiblemente, quienes lo escogieron, al realizar la sustracción utilizaron dos números muy cercanos entre sí, donde  $(d - c)$  da por resultado un número menor que 1, por ejemplo  $d = 5,5$  y  $c = 5$ .

## PREGUNTA 4

En un viaje Pedro se traslada 800 km. La cuarta parte del viaje lo realiza en bus. Las tres quintas partes del resto lo hace en avión y lo que queda en tren. ¿Cuántos kilómetros anduvo Pedro en tren?

- A) 120 km
- B) 240 km
- C) 320 km
- D) 360 km
- E) 480 km

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

**Contenido:** Resolución de problemas en contextos diversos que involucren números racionales.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** B

### COMENTARIO

Para resolver la pregunta el postulante debe comprender el enunciado y traducirlo a un lenguaje matemático, para luego operar con números racionales. Así, en el enunciado se indica que Pedro viaja la cuarta parte de los 800 km en bus, es decir, se traslada en bus 200 km, quedándole aún 600 km por recorrer, luego anduvo las tres quintas partes de 600 km en avión, o sea,  $\frac{3}{5} \cdot 600$  que equivale a 360 km, quedándole por recorrer 240 km en tren. Este resultado da respuesta al problema y se encuentra en la opción B).

El distractor A) obtuvo un 16% de las preferencias siendo el más marcado, el error que cometen probablemente los postulantes es que calculan  $\frac{3}{5}$  de lo que viajó en bus, es decir,  $\frac{3}{5}$  de 200 km, llegando a 120 km.

### PREGUNTA 5

Un alumno explica en el pizarrón la transformación de  $x = 1,2\bar{5}$  a fracción, para lo cual desarrolla los siguientes pasos:

**Paso 1:** Multiplica por 10 a ambos lados de la igualdad obteniendo  $10x = 12,5\bar{5}$

**Paso 2:** Realiza

$$\begin{array}{r} 10x = 12,5\bar{5} \\ - \quad x = 1,2\bar{5} \\ \hline \end{array}$$

obteniendo  $9x = 11,25$

**Paso 3:** Transforma el decimal 11,25 a fracción, obteniendo  $9x = \frac{1.125}{100}$

**Paso 4:** Despeja x, obteniendo  $x = \frac{1.125}{900}$

¿En cuál de los pasos el alumno cometió un error?

- A) En el paso 1
- B) En el paso 2
- C) En el paso 3
- D) En el paso 4
- E) En ningún paso, todos son correctos.

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

**Contenido:** Transformación de números decimales infinitos semiperiódicos a fracción.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** B

### COMENTARIO

En este ítem el postulante debe comprender la transformación de números semiperiódicos a fracción de manera tal que pueda determinar en cuál de los pasos se cometió un error.

Es así que, al multiplicar por 10 cada miembro de la igualdad dada en el enunciado,  $x = 1,2\bar{5}$ , se obtiene  $10x = 12,5\bar{5}$ , por lo que el paso 1 es correcto.

Ahora, en el enunciado se indica que en el paso 2 el alumno resuelve la sustracción

$$\begin{array}{r} 10x = 12,5\bar{5} \\ - x = 1,2\bar{5} \\ \hline \end{array}$$

Para ello el número  $12,5\bar{5}$  se escribirá como  $12,5555\dots$  y el número  $1,2\bar{5}$  se escribirá como  $1,2555\dots$ , por lo que al resolver las sustracciones se tiene  $10x - x = 12,5555\dots - 1,2555\dots$ , obteniendo como resultado  $9x = 11,3$  y no  $9x = 11,25$  como se indica en el paso 2, luego aquí se comete un error.

Por lo anterior, la clave es B) y en cuanto a los distractores todos tuvieron un comportamiento similar en relación a las preferencias de quienes erraron el ítem.

### PREGUNTA 6

Si  $a$  y  $b$  son números enteros positivos tales que  $a > b$ , entonces el orden creciente de las fracciones  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{-a}{b}$  y  $\frac{-b}{a}$ , es

- A)  $\frac{-a}{b}$ ,  $\frac{-b}{a}$ ,  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{a}{b}$
- B)  $\frac{-a}{b}$ ,  $\frac{-b}{a}$ ,  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{b}{a}$
- C)  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{-b}{a}$ ,  $\frac{-a}{b}$
- D)  $\frac{-b}{a}$ ,  $\frac{-a}{b}$ ,  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{a}{b}$
- E)  $\frac{-b}{a}$ ,  $\frac{-a}{b}$ ,  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{b}{a}$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

**Contenido:** Orden de números racionales.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** A

### COMENTARIO

El postulante debe analizar las fracciones dadas en el enunciado en función de las condiciones entregadas para  $a$  y  $b$ , para luego escribirlas de menor a mayor.

Es así como, del enunciado se tiene que  $a > b$ , y al multiplicar por  $\frac{1}{b}$  a ambos lados de la desigualdad se obtiene que  $\frac{a}{b} > 1$ , de la misma manera si se multiplica por  $\frac{1}{a}$  en ambos lados de  $a > b$  se tiene que  $1 > \frac{b}{a} > 0$ , ya que  $a$  y  $b$  son números enteros positivos, luego se tiene que  $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$ , por lo que se descartan las opciones B), C) y E).

Ahora bien, como  $a > b$  se tiene que  $-a < -b$ , luego dado que  $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$ , se llega a  $\frac{-a}{b} < \frac{-b}{a}$ , concluyéndose que el orden de menor a mayor de las fracciones se encuentra en la opción A).

Por otro lado, el distractor con mayor preferencia fue D) con un 21% de adhesión, lo más probable es que los postulantes que lo abordaron no consideraron que si un número positivo es mayor que otro número positivo sus inversos aditivos quedan ordenados de manera invertida, por ejemplo, si  $4 > 2$ , entonces  $-4 < -2$ .

### PREGUNTA 7

Una cuerda de 243 cm se corta sucesivamente, de manera que después de cada corte se escoge la mayor cuerda resultante, cuya longitud es  $\frac{2}{3}$  de la longitud de la cuerda anterior.

¿Cuál es la longitud de la mayor cuerda resultante luego de cinco cortes?

- A) 32,4 cm
- B) 72,9 cm
- C) 32 cm
- D) 40,5 cm
- E) 122 cm



## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender el significado de potencias que tienen como base un número racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.

**Contenido:** Resolución de problemas que involucren potencias de base racional y exponente entero.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** C

### COMENTARIO

Este ítem se puede resolver a través de potencias, para lo cual el postulante debe interpretar el problema y aplicar propiedades de potencias.

En efecto, en el enunciado se indica que una cuerda de 243 cm se corta 5 veces en forma sucesiva y se escoge la cuerda de mayor longitud en cada corte, equivalente a las  $\frac{2}{3}$  partes de la cuerda mayor, esto es,  $\frac{2}{3}$  de los  $\frac{2}{3}$  de los  $\frac{2}{3}$  de los  $\frac{2}{3}$  de los  $\frac{2}{3}$  de 243 cm, lo que es equivalente a  $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 243$ , que es lo mismo que  $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 243$ , dando como resultado 32 cm.

De lo anterior se tiene que la longitud mayor de la cuerda resultante, luego de 5 cortes de la cuerda original, es 32 cm, resultado que se encuentra en la opción C).

Por su parte, el distractor con mayor porcentaje de las preferencias fue A) con un 13% de adhesión, lo más probable es que los postulantes que lo marcaron entendieron que debían calcular las  $\frac{2}{3}$  partes de la cuerda de 243 cm y luego dividir el resultado por 5, que eran los cortes a realizar.

### PREGUNTA 8

Sea  $p$  un número entero positivo múltiplo de 6,  $q$  un número entero positivo múltiplo de 12,  $r$  un número divisor de 6 y  $s$  un número divisor de 12. ¿Cuál de las siguientes expresiones tiene por resultado **siempre** un número racional **NO** entero?

- A)  $\frac{p}{s}$
- B)  $\frac{r}{q}$
- C)  $\frac{q}{p}$
- D)  $\frac{s}{r}$
- E)  $\frac{s}{q}$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender que los números racionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números enteros y caracterizarlos como aquellos que pueden expresarse como un cociente de dos números enteros con divisor distinto de cero.

**Contenido:** Ampliar el conjunto de los números enteros al conjunto de los números racionales.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** B

### COMENTARIO

En esta pregunta se debe analizar cuando un número es racional y no es un número entero y para ello se debe recordar de la enseñanza básica el concepto de múltiplo y de divisor de un número.

Como en el enunciado se menciona que  $p$  es un número entero positivo múltiplo de 6, se puede escribir la igualdad  $p = 6k$ , con  $k$  un número entero positivo, de la misma manera como  $q$  es un número entero positivo múltiplo de 12 se puede escribir como  $q = 12n$ , con  $n$  un número entero positivo, además, como  $r$  es un número divisor de 6 se puede escribir la expresión  $m = \frac{6}{r}$ , que es lo mismo que  $r = \frac{6}{m}$ , con  $m$  un número entero distinto de 0, de la misma manera como  $s$  es un divisor de 12 se puede escribir la expresión  $t = \frac{12}{s}$ , que es equivalente a  $s = \frac{12}{t}$ , con  $t$  un número entero distinto de 0.

A continuación, se analizará cada una de las opciones para verificar cuál de las expresiones presentadas en ellas tiene siempre como resultado un número racional no entero.

En la opción A) se da la fracción  $\frac{p}{s}$  la que al escribirla con las expresiones definidas en el párrafo anterior se obtiene  $\frac{p}{s} = \frac{6k}{\frac{12}{t}} = \frac{6kt}{12} = \frac{kt}{2}$ , expresión que es un número entero si  $k$  ó  $t$  es un número par.

Ahora, en B) se tiene  $\frac{r}{q}$  y reemplazando por las expresiones definidas se obtiene  $\frac{r}{q} = \frac{\frac{6}{m}}{12n} = \frac{6}{12nm} = \frac{1}{2nm}$ , como  $n$  y  $m$  son números enteros distintos de cero, entonces  $\frac{r}{q}$  siempre será un número racional no entero.

Si se realiza el mismo análisis en la opción C) se tiene  $\frac{q}{p} = \frac{12n}{6k} = \frac{2n}{k}$ , ahora si se considera que  $k$  es un múltiplo de  $n$ , la expresión  $\frac{q}{p}$  es un número entero.

En D) se tiene  $\frac{s}{r}$  y al reemplazar por las expresiones definidas se llega a

$\frac{s}{r} = \frac{\frac{12}{t}}{\frac{6}{m}} = \frac{12m}{6t} = \frac{2m}{t}$ , en este caso si m es múltiplo de t siempre da un número entero como resultado.

Por último, en E) se tiene la expresión  $\frac{s}{q}$  la que se puede escribir como

$\frac{s}{q} = \frac{12}{12n} = \frac{12}{12nt} = \frac{1}{nt}$ , en este caso si n y t son iguales a 1 la expresión es un número entero.

Por el análisis anterior, la clave es B) y el distractor más marcado fue A) con un 16% de las preferencias, lo más probable es que los postulantes al obtener una expresión con denominador 2 piensan que siempre será una fracción y no consideran que el numerador puede ser un múltiplo de 2 y por lo tanto, puede ser un número entero.

## PREGUNTA 9

$$5^{2n-3} - 5^{2n-1} + 25^{n-1} =$$

- A)  $5^{2n-3}$
- B)  $5^{2n-6}$
- C)  $5^{2n-1}$
- D)  $-19 \cdot 5^{2n-3}$
- E) Ninguna de las expresiones anteriores.

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender el significado de potencias que tienen como base un número racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.

**Contenido:** Propiedades de las potencias de base racional y exponente entero.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** D

## COMENTARIO

Esta pregunta se puede resolver a través de la aplicación de las potencias, en este caso división de potencias de igual base, es decir,  $\frac{m^p}{m^r} = m^{p-r}$ .

La expresión  $5^{2n-3} - 5^{2n-1} + 25^{n-1}$  se puede expresar como  $5^{2n-3} - 5^{2n-1} + 5^{2(n-1)}$ , que es equivalente a  $5^{2n-3} - 5^{2n-1} + 5^{2n-2}$ , la cual se puede escribir como  $\frac{5^{2n}}{5^3} - \frac{5^{2n}}{5^1} + \frac{5^{2n}}{5^2}$ , luego al factorizar por  $5^{2n}$  se tiene que

$$5^{2n} \left( \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} \right) = 5^{2n} \left( \frac{1}{125} - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} \right) = 5^{2n} \left( \frac{-19}{125} \right) = 5^{2n} \left( \frac{-19}{5^3} \right)$$

llegando a la expresión  $-19 \cdot 5^{2n-3}$ , que se encuentra en la opción D).

El distractor más marcado fue E), con un 21% de adhesión, posiblemente al operar con las potencias erróneamente llegaron a un resultado que no estaba en las opciones.

## PREGUNTA 10

¿Cuál de las siguientes expresiones tiene un valor diferente a  $2\sqrt{5}$  ?

- A)  $\sqrt{5} + \sqrt{5}$
- B)  $\sqrt{20}$
- C)  $\sqrt{5+5}$
- D)  $\frac{\sqrt{500}}{5}$
- E)  $\frac{10}{\sqrt{5}}$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Establecer relaciones entre potencias, logaritmos y raíces en el contexto de los números reales, demostrar algunas de sus propiedades y aplicarlas a la resolución de problemas.

**Contenido:** Raíz enésima en el conjunto de los números reales.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** C

## COMENTARIO

Para resolver el ítem el postulante puede aplicar propiedades y operaciones de raíces para encontrar cuál de las expresiones en las opciones es diferente a la del enunciado.

En efecto, en A) se tiene  $\sqrt{5} + \sqrt{5}$  que al sumarlas se obtiene  $2\sqrt{5}$ , número que equivale al dado en el enunciado.

En B) al descomponer  $\sqrt{20}$  se obtiene  $\sqrt{4 \cdot 5}$  que es igual a  $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$  que equivale a  $2\sqrt{5}$ , número dado en el enunciado.

En C) se tiene  $\sqrt{5+5}$  expresión que es igual a  $\sqrt{2 \cdot 5}$  y esta es igual a  $\sqrt{10}$ , número que no es igual al dado en el enunciado, porque  $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ .

En D) se tiene  $\frac{\sqrt{500}}{5}$  que es equivalente a  $\frac{\sqrt{5 \cdot 100}}{5}$ , que es igual a  $\frac{10\sqrt{5}}{5}$  que es lo mismo que  $2\sqrt{5}$ , número que es igual al dado en el enunciado.

En E) se debe racionalizar la expresión  $\frac{10}{\sqrt{5}}$  obteniéndose  $\frac{10\sqrt{5}}{5}$ , que es equivalente a  $2\sqrt{5}$ , luego este número es igual al dado en el enunciado.

Por la resolución anterior la clave es C). Los distractores B) y E) son los que obtuvieron la mayor preferencia con un 11% de adhesión cada uno, en el primero posiblemente los postulantes no supieron descomponer  $\sqrt{20}$  y en el distractor E) no supieron racionalizar.

## PREGUNTA 11

¿Cuál de las siguientes igualdades es verdadera?

- A)  $\log 3 + \log 5 = \log 8$
- B)  $\frac{\log 10}{\log 2} = \log 5$
- C)  $\log_2 16 = 8$
- D)  $\log \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3} \log 7$
- E)  $\log_5 15 \cdot \log_5 3 = \log_5 45$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Establecer relaciones entre potencias, logaritmos y raíces en el contexto de los números reales, demostrar algunas de sus propiedades y aplicarlas a la resolución de problemas.

**Contenido:** Propiedades de los logaritmos.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** D

### COMENTARIO

En este ítem el postulante debe comprender las propiedades de los logaritmos para determinar cuál de las igualdades dadas en las opciones es verdadera.

Así, considerando la propiedad de los logaritmos  $\log P + \log Q = \log (P \cdot Q)$ , con P y Q números reales positivos, se tiene que  $\log 3 + \log 5 = \log (3 \cdot 5) = \log 15$ , por lo tanto, la igualdad en A) es falsa.

La opción B) también es falsa, ya que como  $\log 10 = 1$ , entonces  $\frac{\log 10}{\log 2}$  se puede escribir como  $\frac{1}{\log 2}$  lo que es distinto a  $\log 5$ .

En la opción C) el número 16 se puede escribir como  $2^4$ , por lo que  $\log_2 16$  es equivalente a  $\log_2 2^4$ , de esta forma por la propiedad del logaritmo de una potencia,  $\log P^n = n \cdot \log P$ , con P un número real positivo y n un número real, se tiene que  $\log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$ , siendo la igualdad en C) falsa.

En cambio en D), por la propiedad del logaritmo de una potencia se tiene que  $\log \sqrt[3]{7} = \log 7^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 7$ , siendo esta opción la clave.

Finalmente, la igualdad en E) es falsa, pues  $\log_5 45 = \log_5 (15 \cdot 3) = \log_5 15 + \log_5 3$ , lo que es distinto a  $\log_5 15 \cdot \log_5 3$ .

En este caso, las personas que erraron su respuesta se distribuyeron en forma similar entre todos los distractores, quizás no comprenden las propiedades de los logaritmos.

### PREGUNTA 12

$$(1 - \sqrt{2})^2 =$$

- A)  $3 - 2\sqrt{2}$
- B) 3
- C) -1
- D)  $-1 - 2\sqrt{2}$
- E)  $3 - \sqrt{2}$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Establecer relaciones entre potencias, logaritmos y raíces en el contexto de los números reales, demostrar algunas de sus propiedades y aplicarlas a la resolución de problemas.

**Contenido:** Raíz enésima en el conjunto de los números reales.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** A

### COMENTARIO

El ítem apunta a la operatoria con raíces enésimas, en la que se puede desarrollar un cuadrado de binomio, es decir,  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .

De esta forma,  $(1 - \sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$ , por lo tanto, la clave es A).

El distractor de mayor preferencia fue C), con un 26% de adhesión, posiblemente quienes marcaron esta opción distribuyen el exponente de la potencia en el binomio de la siguiente forma:

$$(1 - \sqrt{2})^2 = 1^2 - (\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = -1.$$

### PREGUNTA 13

Si a y b son números reales positivos,  $P = a^2 + b^2$ ,  $Q = (a + b)^2$  y  $R = \frac{a^3 + b^3}{a + b}$ , ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

- A)  $P = Q = R$
- B)  $R < P = Q$
- C)  $R = P < Q$
- D)  $R < P < Q$
- E)  $P < Q < R$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Utilizar los números reales en la resolución de problemas, ubicarlos en la recta numérica, demostrar algunas de sus propiedades y realizar aproximaciones.

**Contenido:** Orden en el conjunto de los números reales.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar.

**Clave:** D

### COMENTARIO

Este ítem hace referencia al análisis de expresiones algebraicas que representan números reales, con el fin de establecer el orden entre ellas, para dicho análisis los postulantes pueden desarrollar un cuadrado de binomio y aplicar la factorización  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ .

Para determinar cuál de las relaciones mostradas en las opciones es verdadera, se desarrolla Q como  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  y se simplifica la fracción algebraica de R, factorizando la suma de cubos, tal como se muestra a continuación:

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = \frac{\cancel{(a + b)}(a^2 - ab + b^2)}{\cancel{a + b}} = a^2 + b^2 - ab$$

Luego, como a y b son números reales positivos se concluye que  $P < Q$ , ya que  $a^2 + b^2 < a^2 + 2ab + b^2$  y que  $R < P$ , pues  $a^2 + b^2 - ab < a^2 + b^2$ , luego  $R < P < Q$ , relación que se encuentra en la opción D).

El distractor más marcado fue C), con un 12% de adhesión, probablemente los postulantes que lo marcaron determinaron correctamente que  $P < Q$ , sin embargo al simplificar R cometieron el siguiente error:

$$\frac{\cancel{a^3} + \cancel{b^3} \overset{a^2}{\quad} \overset{b^2}{\quad}}{\cancel{a + b}} = \frac{a^2 + b^2}{1} = a^2 + b^2$$

llegando a  $R = P < Q$ .

#### PREGUNTA 14

Si se considera que el valor aproximado de  $\sqrt{10}$  dado por la calculadora es 3,16227766, n es  $\sqrt{10}$  aproximado por exceso a la milésima, m es  $\sqrt{10}$  aproximado por defecto a la milésima y  $r = \sqrt{(m - \sqrt{10})^2} + \sqrt{(\sqrt{10} - n)^2}$ , entonces r es igual a

- A) -0,001
- B) 0,001
- C) 0,002
- D) -0,0001
- E) 0

#### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Utilizar los números reales en la resolución de problemas, ubicarlos en la recta numérica, demostrar algunas de sus propiedades y realizar aproximaciones.

**Contenido:** Aproximación de un número irracional por defecto y por exceso.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** B



## COMENTARIO

El contenido al que hace referencia esta pregunta es la aproximación de un número irracional por defecto y por exceso, y para determinar su solución el postulante debe determinar el valor de  $\sqrt{(m - \sqrt{10})^2} + \sqrt{(\sqrt{10} - n)^2}$ , además puede considerar que  $\sqrt{x^2} = |x|$ .

Ahora, al realizar la mejor aproximación por exceso a la milésima 3,16227766, se tiene que  $n = 3,163$  y al realizar la mejor aproximación por defecto a la milésima el mismo número se llega a  $m = 3,162$ , entonces al remplazar estos valores en  $\sqrt{(m - \sqrt{10})^2} + \sqrt{(\sqrt{10} - n)^2}$ , se obtiene:

$$\sqrt{(3,162 - 3,16227766)^2} + \sqrt{(3,16227766 - 3,163)^2} = \sqrt{(-0,00027766)^2} + \sqrt{(-0,00072234)^2} = |-0,00027766| + |-0,00072234| = 0,00027766 + 0,00072234 = 0,001$$

Luego el valor de  $r$  es 0,001, resultado que se encuentra en B).

Con una frecuencia del 22% la opción E) fue el distractor de mayor preferencia, probablemente los postulantes que lo seleccionaron consideran que el valor de restar un número con alguna aproximación de éste da como resultado cero, por lo que  $r = 0$ .

## PREGUNTA 15

¿Qué condición debe cumplir  $x$  en la expresión  $\sqrt{x^2 - 12}$  para que ésta represente un número complejo con parte imaginaria distinta de cero?

- A)  $x < 12$
- B)  $x < \sqrt{12}$
- C)  $x \leq \sqrt{12}$
- D)  $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$
- E)  $-12 < x < 12$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Tercero medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender que los números complejos constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números reales, y reconocer su relación con los números naturales, números enteros, números racionales y números reales.

**Contenido:** Números complejos.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** D

## COMENTARIO

Para resolver el ítem el postulante debe determinar las condiciones que debe cumplir  $x$  en la expresión  $\sqrt{x^2 - 12}$  para que ésta represente un número complejo con parte imaginaria distinta de cero.

En efecto, para que la expresión  $\sqrt{x^2 - 12}$  sea un número complejo con parte imaginaria distinta de cero, la cantidad subradical de una raíz cuadrada debe ser menor que 0, es decir,  $x^2 - 12 < 0$ , lo que es equivalente a  $x^2 < 12$ .

A continuación, se analizará lo que sucede con  $x$  en distintos casos:

- Cuando  $x < -\sqrt{12}$  o cuando  $x > \sqrt{12}$ , se tiene que  $x^2 > 12$ , por ejemplo, para  $x = -4$ , se obtiene que  $x^2 = 16 > 12$ .
- Cuando  $x = -\sqrt{12}$  o cuando  $x = \sqrt{12}$ , se obtiene que  $x^2 = 12$ .
- Por último, cuando  $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$ , se llega a que  $x^2 < 12$ , por ejemplo, para  $x = -\frac{1}{2}$ , se obtiene que  $x^2 = \frac{1}{4} < 12$ .

Por lo anterior, para que  $x^2 - 12 < 0$ , se debe cumplir que  $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$ , relación que se encuentra en la opción D).

En este caso, las personas que erraron la respuesta, se distribuyeron en forma similar entre todos los distractores.

## PREGUNTA 16

Sea el número complejo  $p = a + bi$ , con  $a$  y  $b$  números reales distintos de cero, ¿cuál de las siguientes igualdades es **siempre** verdadera?

- A)  $|\bar{p}| = a^2 + b^2$
- B)  $p \cdot (1 + 0i) = a$
- C)  $p^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$
- D)  $p - \bar{p} = 0$
- E)  $p \cdot \bar{p} = p^2$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Aplicar procedimientos de cálculo de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números complejos, formular conjeturas acerca de esos cálculos y demostrar algunas de sus propiedades.

**Contenido:** Propiedades de los números complejos.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** C

## COMENTARIO

En este ítem el postulante debe aplicar las propiedades de los números complejos de modo que pueda concluir cuál de las igualdades dadas en las opciones es siempre verdadera, considerando el número complejo  $p = a + bi$ , con  $a$  y  $b$  números reales distintos de cero y su conjugado  $\bar{p} = a - bi$ .

Como el módulo de un número complejo  $z = c + di$  es  $|z| = \sqrt{c^2 + d^2}$ , se concluye que la igualdad en A) no es verdadera, ya que  $|\bar{p}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

En B) se afirma que  $p \cdot (1 + 0i) = a$ , pero como  $1 + 0i = 1$ , se tiene que  $p \cdot (1 + 0i) = p \cdot 1 = p = a + bi \neq a$ , por lo tanto la igualdad es falsa, ya que  $b \neq 0$ .

El inverso multiplicativo de  $p$  se obtiene de la forma  $\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$ , por lo que la igualdad en C) es siempre verdadera, siendo ésta la clave.

La opción D) es falsa, ya que  $p - \bar{p} = a + bi - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi$ , resultado que es distinto de 0, pues  $b \neq 0$ .

La opción E) también es falsa, debido a que  $p \cdot \bar{p} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$  y  $p^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ , con  $a$  y  $b$  números reales distintos de cero, luego  $p \cdot \bar{p} \neq p^2$ .

El distractor A) fue el que tuvo mayor preferencia, con un 20% de adhesión, probablemente los postulantes que lo marcaron no consideraron la raíz cuadrada en la fórmula del módulo de un número complejo.

## PREGUNTA 17

Si  $k$  es un número real, ¿para qué valor de  $k$  la parte real e imaginaria del número complejo  $\frac{2 + i}{k + i}$  son iguales?

- A) -3
- B) 1
- C) 2
- D) -1
- E) 3

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Aplicar procedimientos de cálculo de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números complejos, formular conjeturas acerca de esos cálculos y demostrar algunas de sus propiedades.

**Contenido:** División de números complejos.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** A

### COMENTARIO

Para resolver este ítem el postulante debe aplicar algún procedimiento de cálculo para la división de dos números complejos, de manera tal que puede determinar el valor del número real  $k$ , para que la parte real e imaginaria del número complejo  $\frac{2+i}{k+i}$  sean iguales.

Para dividir los números complejos  $(2+i)$  y  $(k+i)$  se puede efectuar el procedimiento que se muestra a continuación:

$$\frac{2+i}{k+i} = \frac{2+i}{k+i} \cdot \frac{k-i}{k-i} = \frac{(2+i)(k-i)}{k^2-i^2} = \frac{2k-2i+ik-i^2}{k^2-(-1)} = \frac{(2k+1)+(k-2)i}{k^2+1} = \frac{2k+1}{k^2+1} + \frac{(k-2)i}{k^2+1}$$

De esta forma, para determinar el valor de  $k$ , de manera que la parte real e imaginaria del número complejo  $\frac{2k+1}{k^2+1} + \frac{(k-2)i}{k^2+1}$  sean iguales, se debe cumplir que  $\frac{2k+1}{k^2+1} = \frac{(k-2)i}{k^2+1}$ , que es equivalente a  $2k+1 = k-2$ , de donde  $k = -3$ , valor que se encuentra en A).

El distractor con mayor frecuencia correspondió a C) con un 58% de las preferencias, los postulantes que seleccionaron este distractor probablemente consideraron que, dado que la parte real del número complejo  $(2+i)$  es 2 y la parte real del número complejo  $(k+i)$  es  $k$ , se cumple que  $k = 2$ .

### PREGUNTA 18

¿Cuál de las siguientes expresiones representa a  $x$  en la ecuación de primer grado  $2q = px - 5$ , con  $p \neq 0$ ?

A)  $2q + 5 - p$

B)  $\frac{2q}{p} + 5$

C)  $\frac{2q+5}{p}$

D)  $\frac{2q}{p-5}$

E)  $\frac{-10q}{p}$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Álgebra

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables, diferenciar entre verificación y demostración de propiedades y analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos, para fundamentar opiniones y tomar decisiones.

**Contenido:** Resolución de ecuaciones literales de primer grado.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** C

### COMENTARIO

Este ítem apunta a la resolución de ecuaciones literales de primer grado con una incógnita. De esta manera, de la ecuación del enunciado  $2q = px - 5$ , se debe expresar  $x$  en función de  $p$  y  $q$ , así, sumando 5 a ambos lados de la ecuación queda  $2q + 5 = px$  y multiplicando por  $\frac{1}{p}$  a ambos lados de la ecuación se obtiene  $\frac{2q+5}{p} = x$ , expresión que se encuentra en la opción C).

El distractor con mayor preferencia fue B) con una frecuencia del 8%, los postulantes que seleccionaron dicho distractor, es probable que en la ecuación  $2q = px - 5$  multiplicaran por  $\frac{1}{p}$  a ambos lados de la ecuación llegando a  $\frac{2q}{p} = x - 5$ , para luego sumar 5 a ambos lados de la igualdad y obtener  $\frac{2q}{p} + 5 = x$ .

### PREGUNTA 19

$$(p + q) + (p + q)^2 =$$

- A)  $3(p + q)$
- B)  $(p + q)^3$
- C)  $p + q + p^2 + q^2$
- D)  $(p + q)(p + q + 1)$
- E)  $2(p + q)^2$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Álgebra

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelo de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.

**Contenido:** Transformación de expresiones algebraicas no fraccionarias en otras equivalentes.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** D

## COMENTARIO

El postulante puede resolver el ítem aplicando la factorización de expresiones algebraicas. Así es, como en la expresión  $(p + q) + (p + q)^2$  se puede extraer como factor común el binomio  $(p + q)$ , se tiene  $(p + q) + (p + q)^2 = (p + q)(1 + p + q)$ , expresión que se encuentra en D).

El distractor más marcado fue B) con un 13% de las preferencias, los postulantes que lo escogieron, probablemente consideraron la suma de  $(p + q)$  con  $(p + q)^2$ , como el producto entre ellos, es decir,  $(p + q)(p + q)^2 = (p + q)^3$ .

## PREGUNTA 20

Juan ahorró dinero juntando en total 65 monedas entre monedas de \$ 100 y de \$ 500. Si en total ahorró \$ 7.300, ¿cuál de los siguientes sistemas permite encontrar la cantidad (y) de monedas de \$ 500 que ahorró, sabiendo que x es la cantidad de monedas de \$ 100?

A) 
$$\begin{cases} 500x + 100y = 65 \\ x + y = 7.300 \end{cases}$$

B) 
$$\begin{cases} x + y = 65 \\ 100x + 500y = 7.300 \end{cases}$$

C) 
$$\begin{cases} x + y = 65 \\ x + y = 7.300 \end{cases}$$

D) 
$$\begin{cases} xy = 65 \\ x + y = 7.300 \end{cases}$$

E) 
$$\begin{cases} x + y = 65 \\ xy = 7.300 \end{cases}$$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Álgebra

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

**Contenido:** Problemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** B

## COMENTARIO

Este ítem apunta al contenido de resolución de problemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, para lo cual los postulantes deben comprender el enunciado y escribir el sistema de ecuaciones lineales que representa la situación planteada.

En efecto, de acuerdo a la información del enunciado, x representa la cantidad de monedas de \$ 100 e y representa la cantidad de monedas de \$ 500, y dado que Juan ahorro “en total 65 monedas entre monedas de \$ 100 y \$ 500”, la expresión  $(x + y)$  representa la cantidad de monedas que Juan juntó, es decir,  $x + y = 65$ , siendo ésta la primera ecuación del sistema.

Por otro lado, se dice en el enunciado que Juan “en total ahorró \$ 7.300”, ese monto está compuesto únicamente por monedas de \$ 100 y de \$ 500, por lo tanto, la cantidad de dinero que corresponde a monedas de \$ 100 se puede expresar como \$ 100x, de la misma forma que la cantidad de dinero que corresponde a monedas de \$ 500 corresponde a \$ 500y, luego los \$ 7.300 corresponde a \$ 100x + \$ 500y, lo que se puede escribir como  $100x + 500y = 7.300$ , siendo ésta la segunda ecuación del sistema. De esta manera, el sistema buscado es

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ 100x + 500y = 7.300 \end{cases}$$

que se encuentra en la opción B).

El distractor con mayor preferencia correspondió a la opción A) con un 9% de adhesión, quizás los postulantes que lo seleccionaron consideraron que la cantidad de monedas de \$ 100 y de \$ 500 corresponde a 100x y 500y, respectivamente, por lo que la cantidad total de monedas es de  $100x + 500y = 65$  y también consideraron a x e y como la cantidad de dinero correspondiente a monedas de \$ 100 y de \$ 500, por lo que la cantidad total de dinero ahorrada por Juan lo expresaron con la ecuación  $x + y = 7.300$ .

## PREGUNTA 21

Alberto entra a una librería con el objetivo de gastar exactamente \$ 100.000 en comprar 70 lápices. En la librería tienen solo dos tipos de lápices, uno vale \$ 1.500 y el otro vale \$ 1.200. ¿Cuántos lápices de cada tipo debe comprar en la librería, para cumplir su objetivo?

- A) 53 y 17
- B) 54 y 16
- C) 53 y 16
- D) Otras cantidades.
- E) Alberto no puede cumplir su objetivo.

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Álgebra

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

**Contenido:** Resolución de problemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** E

## COMENTARIO

Esta pregunta está referida al contenido de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y para resolverla el postulante debe ser capaz de plantear un sistema de ecuaciones con la información entregada en el enunciado, resolverlo y analizar si es posible que Alberto cumpla su objetivo de gastar exactamente el dinero que tiene en la compra de 70 lápices.

Para ello, se asigna por M a la cantidad de lápices de \$ 1.500 y por N a la cantidad de lápices de \$ 1.200 que debiese comprar Alberto. Además, como se deben gastar exactamente \$ 100.000 en la compra de estos lápices, se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} M + N = 70 \\ 1.500M + 1.200N = 100.000 \end{array}$$

luego, al despejar M en  $M + N = 70$  y reemplazar en la otra ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} 1.500(70 - N) + 1.200N &= 100.000 \\ 1.500 \cdot 70 - 1.500N + 1.200N &= 100.000 \\ 105.000 - 300N &= 100.000 \\ -300N &= -5.000 \\ N &= \frac{5.000}{300} \\ N &= 16,\bar{6} \end{aligned}$$

Analizando este resultado, Aberto no puede gastar exactamente \$ 100.000 debido a que tendría que comprar  $16,\bar{6}$  lápices de \$ 1.200, lo que es imposible debido a que los lápices se venden por unidad y no fracción de ellos.

De lo anterior, la opción correcta es E) y el distractor con mayor frecuencia fue D), con un 25% de las preferencias. Posiblemente quienes lo escogieron, cometieron errores al plantear o al resolver el sistema, obteniendo valores que no se encontraban en las opciones, o bien, consideraron que la solución es  $N = 16,\bar{6}$  y su respectivo valor de M.

## PREGUNTA 22

Si  $q$  es un número real mayor que 1, entonces  $\frac{6}{q^3} + q^2$  es igual a

- A)  $\frac{6 + q^5}{q^3}$
- B)  $\frac{6 + q^6}{q^3}$
- C)  $\frac{6 + q^2}{q^3}$
- D)  $6 + q^6$
- E)  $6 + q^5$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Álgebra

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Interpretar la operatoria con expresiones algebraicas fraccionarias como una generalización de la operatoria con fracciones numéricas, establecer estrategias para operar con este tipo de expresiones y comprender que estas operaciones tienen sentido solo en aquellos casos en que estas están definidas.

**Contenido:** Operatoria con fracciones algebraicas simples.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** A



## COMENTARIO

Este ítem apunta al contenido de operatoria de fracciones algebraicas simples, donde el postulante debe sumar dos expresiones algebraicas.

En efecto,  $\frac{6}{q^3} + q^2$  es igual a  $\frac{6 + q^2 \cdot q^3}{q^3}$  lo que es equivalente a  $\frac{6 + q^5}{q^3}$ , expresión que se encuentra en la opción A).

El distractor más marcado fue C) con un 16% de las preferencias, posiblemente quienes lo escogieron sumaron los numeradores y conservaron el denominador.

## PREGUNTA 23

El par de números  $x = \frac{3}{2}$  e  $y = -\frac{3}{2}$  es solución del sistema  $\begin{cases} ax - y = 6 \\ x - by = 6 \end{cases}$ .  
El valor de  $(a + b)$  es

- A) 3
- B) 0
- C) 6
- D) 2
- E) 10

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Álgebra

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

**Contenido:** Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** C

## COMENTARIO

El contenido al que este ítem hace referencia es el de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Para dar respuesta a la pregunta el postulante debe determinar los valores de  $a$  y  $b$  para luego sumarlos.

Como  $x$  e  $y$  son la solución del sistema planteado en el enunciado, se reemplazan estos valores en las ecuaciones del sistema para determinar los valores de  $a$  y  $b$ .

En efecto, reemplazando  $x = \frac{3}{2}$  e  $y = -\frac{3}{2}$  en  $\begin{cases} ax - y = 6 \\ x - by = 6 \end{cases}$  se obtiene  $\begin{cases} \frac{3a}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 6 \\ \frac{3}{2} - b\left(-\frac{3}{2}\right) = 6 \end{cases}$

despejando  $a$  en la primera ecuación se obtiene que  $a = 3$  y despejando  $b$  en la segunda ecuación se llega a que  $b = 3$ , por lo que  $a + b = 6$ , valor que se encuentra en la opción C).

El distractor más marcado fue B) con un 11% de adhesión. Es probable que aquellos que lo escogieron hayan realizado el siguiente desarrollo:

Al resolver el sistema  $\begin{cases} ax - y = 6 \\ x - by = 6 \end{cases}$  por igualación se tiene

$$\begin{aligned} ax - y &= x - by \\ ax - x &= y - by \\ x(a - 1) &= y(1 - b) \\ \frac{3}{2}(a - 1) &= -\frac{3}{2}(1 - b) \\ (a - 1) &= -(1 - b) \\ a - 1 &= -1 - b \\ a + b &= -1 + 1 \\ a + b &= 0 \end{aligned}$$

## PREGUNTA 24

¿Cuál es el conjunto de todos los valores de  $p$ , para que la ecuación en  $x$ ,  $(x - p)^2 + 8p = 0$  tenga dos soluciones reales y distintas?

- A)  $]0, \infty[$
- B)  $] -\infty, 0[$
- C)  $] -\infty, 0]$
- D)  $[0, \infty[$
- E)  $\phi$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Álgebra

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender que toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces en el conjunto de los números complejos.

**Contenido:** Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** B

## COMENTARIO

Este ítem apunta al contenido de ecuaciones de segundo grado con una incógnita y para resolverlo el postulante debe ser capaz de determinar el conjunto de todos los valores de  $p$  para los cuales la ecuación presentada en el enunciado tiene dos soluciones reales y distintas, lo que ocurre cuando el discriminante de la ecuación es mayor que cero, es decir, para que una ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  tenga dos raíces reales y distintas, se debe cumplir que  $b^2 - 4ac > 0$ .

Ahora, al desarrollar el cuadrado de binomio en la ecuación  $(x - p)^2 + 8p = 0$ , se obtiene  $x^2 - 2px + p^2 + 8p = 0$ , luego para que esta ecuación tenga dos soluciones reales y distintas se debe cumplir que  $(-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p^2 + 8p) > 0$ , o sea,  $4p^2 - 4p^2 - 32p > 0$ , lo que es equivalente a  $-32p > 0$  y al multiplicar ambos lados de la desigualdad por  $-\frac{1}{32}$ , se llega a que  $p < 0$ , es decir,  $p \in ]-\infty, 0[$ , conjunto que se encuentra en la opción B).

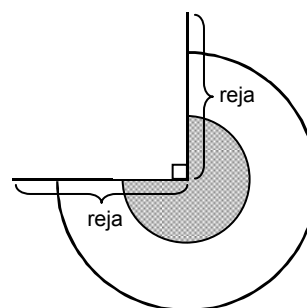
El distractor D) obtuvo la mayor frecuencia con un 11% de adhesión, posiblemente quienes lo escogieron pensaron que para que una ecuación cuadrática tenga dos soluciones reales y distintas el discriminante debe ser mayor o igual a cero y además, cometieron el error de que al multiplicar por  $-\frac{1}{32}$  a ambos lados de la desigualdad no invirtieron el sentido de dicha desigualdad.

## PREGUNTA 25

Se amarra con un cordel una vaca en la esquina de una reja con el objetivo de que paste en un prado que se representa en la zona achurada de la figura 2. ¿Cuál debe ser la longitud del cordel para que al alargarlo en 10 m, el área en que puede pastar la vaca se cuadruplique?

- A) 30 m
- B) 20 m
- C)  $\frac{10}{3}$  m
- D) 10 m
- E)  $\frac{10}{3}\sqrt{3}$  m

fig. 2



## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Álgebra

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender que toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces en el conjunto de los números complejos.

**Contenido:** Resolución de problemas asociados a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** D

## COMENTARIO

Esta pregunta tiene relación con la resolución de problemas que involucran ecuaciones de segundo grado con una incógnita y para responderla el postulante debe determinar la longitud de un cordel que amarra una vaca, de tal manera que al ser alargado en 10 m se cuadruplique el área donde pastará una vaca.

Es así como, si se considera que el área original donde pasta la vaca es  $\frac{3}{4}$  del área de un círculo y el cordel corresponde al radio del círculo achurado, se tiene que el área donde pasta la vaca es  $\frac{3}{4}\pi r^2$ , donde r correspondería al largo del cordel. Ahora, al alargar el cordel en 10 m, se tiene que la nueva área donde pastará la vaca es cuatro veces el área donde pastaba antes, es decir,  $\frac{3}{4}\pi(r + 10)^2 = 4 \cdot \frac{3}{4}\pi r^2$ .

De esta manera:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\pi(r + 10)^2 &= 4 \cdot \frac{3}{4}\pi r^2 \\ (r + 10)^2 &= 4r^2 \\ r^2 + 20r + 100 &= 4r^2 \\ 3r^2 - 20r - 100 &= 0 \\ (r - 10)\left(r + \frac{10}{3}\right) &= 0\end{aligned}$$

Luego, se determina que  $r = 10$  ó  $r = -\frac{10}{3}$ , pero como r es el largo del cordel, éste no puede ser negativo, por lo que la respuesta al problema es 10 m, valor que se encuentra en la opción D).

El distractor más marcado fue A) con un 8% de las preferencias, posiblemente los postulantes que lo marcaron asociaron que con 10 m se tiene un área M donde pasta la vaca y con  $(10 + r)$  se tienen cuatro veces el área donde pastará la vaca (4M), luego desarrollaron una proporción como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{10}{M} &= \frac{10 + r}{4M} \\ 40 &= 10 + r \\ 30 &= r\end{aligned}$$

## PREGUNTA 26

¿En cuál de los siguientes intervalos están solo los números reales que pertenecen a  $] - 3, 5]$  y no pertenecen a  $[- 1, 7[$ ?

- A)  $] - 3, - 1[$
- B)  $] - 3, - 1]$
- C)  $[- 1, 5]$
- D)  $] - 3, 7[$
- E)  $[5, 7[$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Álgebra

**Nivel:** Cuarto Medio

**Objetivo Fundamental:** Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones.

**Contenido:** Representación de intervalos.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** A

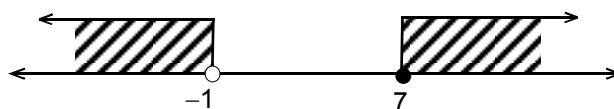
### COMENTARIO

Este ítem hace referencia a la representación de intervalos y para dar solución al ítem el postulante debe analizar los intervalos dados en el enunciado para determinar cuáles son los números reales que pertenecen a  $] -3, 5]$  y no pertenecen a  $[-1, 7[$ .

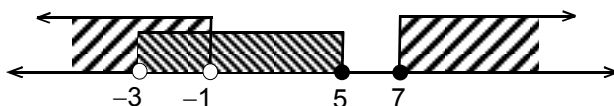
Una forma de resolver este ítem es de manera gráfica, es así como el intervalo  $] -3, 5]$  se puede representar gráficamente como:



Por otra parte, la frase “no pertenecen a  $[-1, 7[$ ” es equivalente con la frase pertenece al conjunto  $] -\infty, -1[ \cup [7, \infty[$ , lo que se expresa gráficamente como:



Ahora, como se pide que los números reales pertenezcan a ambos intervalos se deben intersectar estos intervalos, como se muestra a continuación:



Donde se observa que la intersección de ambos conjuntos corresponde al intervalo  $] -3, -1[$ , que se encuentra en la opción A).

El distractor más llamativo fue B) con un 16% de las preferencias, es probable que los postulantes que lo escogieron expresaron erróneamente la frase “no pertenecen a  $[-1, 7[$ ” como pertenece a  $] -\infty, -1[ \cup [7, \infty[$  realizando bien la intersección entre los intervalos.

## PREGUNTA 27

Juan tiene un sitio cuadrado de  $b^2$  metros cuadrados de superficie y le compra a su vecino un terreno del mismo ancho que el suyo. Con esta compra Juan posee ahora un sitio rectangular cuya superficie es menor que 220 metros cuadrados. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) Juan compró exactamente un terreno de  $(220 - b^2)$  metros cuadrados.
  - II) El lado de mayor longitud de su sitio rectangular es menor que  $\frac{220}{b}$  metros.
  - III) Uno de los lados del terreno que compró es de  $b$  metros y el otro es menor que  $\frac{220 - b^2}{b}$  metros.
- A) Solo I
  - B) Solo II
  - C) Solo I y II
  - D) Solo II y III
  - E) I, II y III

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Álgebra

**Nivel:** Cuarto Medio

**Objetivo Fundamental:** Modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resultante sea la función potencia, inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones.

**Contenido:** Resolución de problemas que implican el planteamiento de inecuaciones y de sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** D

### COMENTARIO

Este ítem apunta a la resolución de problemas que involucran el planteamiento de inecuaciones, de tal manera que para dar solución al ítem el postulante debe determinar la veracidad de las afirmaciones presentadas en I), en II) y en III).

Del enunciado se tiene que Juan tiene un terreno cuadrado de área  $b^2$  metros cuadrados y le compra a su vecino un terreno del mismo ancho que el suyo, no dándose información de la medida del largo del terreno que compró, pero si se dice que Juan posee ahora un terreno rectangular. La siguiente figura ilustra la situación planteada, con  $b$  el ancho y  $x$  el largo del terreno que compró Juan.



Del enunciado se tiene que el área del terreno total de Juan después de la compra es menor que 220 metros cuadrados, es decir,  $b(b + x) < 220$ .

En I) se afirma que Juan compró exactamente un terreno de  $(220 - b^2)$  metros cuadrados. Para que esta afirmación sea cierta, se debe cumplir además que la suma de las áreas de ambos terrenos debe ser menor a 220 metros cuadrados. Ahora, al sumar  $b^2$  con  $(220 - b^2)$  da como resultado 220 metros cuadrados, en cambio, en el enunciado se indica que la superficie del nuevo terreno es menor a 220 metros cuadrados, luego la afirmación en I) es falsa.

En II) se afirma que el lado de mayor longitud del terreno rectangular de Juan es menor que  $\frac{220}{b}$ . Esta afirmación es verdadera, porque si se considera que  $b$  y  $(b + x)$  son los lados del terreno rectangular, en donde se cumple que  $b(b + x) < 220$ , se tiene que  $(b + x) < \frac{220}{b}$ .

En III) se afirma que uno de los lados del terreno comprado es  $b$  metros y el otro es menor que  $\frac{220 - b^2}{b}$ . Esta afirmación también es verdadera, ya que el ancho del terreno que compró Juan es  $b$  metros, lo que se deduce del enunciado y de la desigualdad  $b(b + x) < 220$  se tiene que:

$$\begin{aligned} b(b + x) &< 220 \\ b^2 + bx &< 220 \\ bx &< 220 - b^2 \\ x &< \frac{220 - b^2}{b} \end{aligned}$$

De lo anterior, la opción correcta es D) y el distractor más marcado fue B) con un 13% de las preferencias, es posible que quienes optaron por este distractor hayan desarrollado de manera errónea la relación  $b(b + x) < 220$ .

## PREGUNTA 28

El nivel del agua en un estanque cilíndrico recto era originalmente  $h$  metros y baja  $q$  metros cada semana. ¿Cuál de las siguientes funciones relaciona el nivel del agua con el número de semanas transcurridas  $x$ , en la situación descrita?

- A)  $f(x) = qx - h$
- B)  $g(x) = h - qx$
- C)  $r(x) = -(h + qx)$
- D)  $p(x) = hx - q$
- E)  $q(x) = q - hx$

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Funciones

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.

**Contenido:** Interpretación de la función afín y análisis de las situaciones que modela.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** B

## COMENTARIO

Para dar solución a este ítem el postulante debe ser capaz de determinar una función que relacione el nivel de agua que va quedando en un estanque a medida que pasa el tiempo dadas ciertas condiciones.

Del enunciado se tiene que el nivel del agua del estanque era originalmente  $h$  metros y baja  $q$  metros cada semana, en base a esta información se tiene que la función que relaciona el nivel del agua con las  $x$  semanas transcurridas es de la forma  $m(x) = h - qx$ , donde  $h$  es el nivel de agua que había originalmente en el estanque y  $q$  corresponde al nivel del agua que baja en una semana.

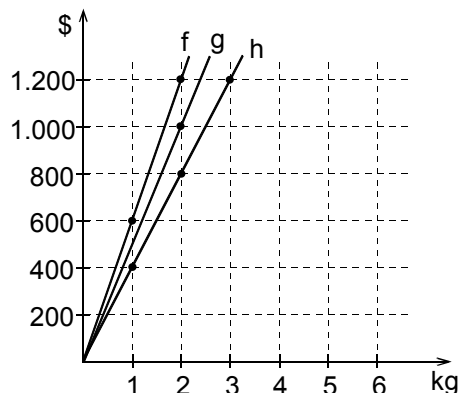
De lo anterior, la opción correcta es B) y el distractor más elegido con un 5% de las preferencias fue D), los postulantes que lo escogieron confundieron el nivel inicial con la disminución semanal del agua en el estanque.

## PREGUNTA 29

En la figura 3 se muestran las gráficas de tres funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$  que representan el costo correspondiente a kilogramos de peras, plátanos y manzanas, respectivamente. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** en relación a la información entregada en el gráfico?

- A) El kilogramo de plátanos es más caro que el kilogramo de manzanas.
- B) 2 kg de peras tienen el mismo costo que 3 kg de manzanas.
- C) Con \$ 1.200 es posible comprar 5 kg de fruta.
- D) Con \$ 1.000 se puede comprar 1 kg de manzanas y 1 kg de peras.
- E) El costo total de 2 kg de cada fruta son \$ 3.000.

fig. 3



## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Funciones

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.

**Contenido:** Función lineal.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** C



## COMENTARIO

Para resolver el ítem el postulante debe interpretar el enunciado y el gráfico, en donde se muestra la gráfica de las funciones que modelan el costo de tres tipos de frutas, donde  $f$  modela el costo de las peras,  $g$  el costo de los plátanos y  $h$  el de las manzanas.

En A) se dice que el kilogramo de plátanos es más caro que el kilogramo de manzanas. Esta afirmación es verdadera, ya que del gráfico se tiene que 1 kilogramo de manzanas tiene un costo de \$ 400 y 1 kilogramo de plátanos cuesta más de \$ 400 y menos de \$ 600.

En B) se afirma que 2 kg de peras tienen el mismo costo que 3 kg de manzanas. Esta afirmación es verdadera, porque en la figura se observa que el costo de 2 kg de peras es \$ 1.200 y el costo de 3 kg de manzanas es \$ 1.200.

En C) se señala que con \$ 1.200 es posible comprar 5 kg de frutas. Esta afirmación es falsa, pues si se observa en la figura la fruta que tiene el costo más bajo es la manzana, cuyo costo es de \$ 400 el kg, por lo tanto se pueden comprar 3 kg de esta fruta y si se quisiera combinar con otra fruta subiría el costo.

En D) se tiene que con \$ 1.000 se puede comprar 1 kg de manzanas y 1 kg de peras. Esta afirmación es verdadera, ya que en la figura el costo de 1 kg de manzanas es \$ 400 y el costo de 1 kg de peras es \$ 600, lo que hace un total de \$ 1.000.

En E) se dice que el costo total de 2 kg de cada fruta son \$ 3.000. Esta afirmación es verdadera, porque en figura el costo de 2 kg de peras es \$ 1.200, el costo de 2 kg de plátanos es \$ 1.000 y el costo de 2 kg de manzanas es \$ 800, que al sumarlos da un total de \$ 3.000.

De lo anterior, se tiene que la opción correcta es C) y el distractor más marcado fue E) con un 12% de las preferencias, es probable que los postulantes que lo escogieron hayan interpretado que el costo de \$ 3.000 correspondía al costo de 2 kg de cualquiera de las tres frutas y como no existe combinación que cumpla tal condición la marcaron como falsa.

## PREGUNTA 30

Si se supone que un modelo para la temperatura  $T$ , en grados Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ), de un líquido recién vertido en un recipiente está dado por  $T(t) = 90 - 10t$ , donde  $t$  es el tiempo transcurrido en minutos, desde el instante en que fue vertido, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) La temperatura disminuye en función del tiempo.
- II) El líquido fue vertido a  $90^{\circ}\text{C}$ .
- III) La temperatura del líquido disminuye a razón de  $10^{\circ}\text{C}$  por minuto.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y III
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Funciones

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.

**Contenido:** Función afín.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** E

### COMENTARIO

Este ítem apunta a la función afín y para resolverlo el postulante debe ser capaz de interpretar el modelo presentado en el enunciado y determinar la veracidad de las afirmaciones presentadas en I), en II) y en III).

En I) se afirma que la temperatura disminuye en función del tiempo, lo cual es verdadero, ya que para el modelo  $T(t) = 90 - 10t$ , si  $t = 1$  la temperatura es  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ , si  $t = 2$  la temperatura es  $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ , si  $t = 3$ , la temperatura es  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ , y así sucesivamente, es decir, a medida que aumenta el tiempo la temperatura disminuye.

En II) se afirma que el líquido fue vertido a  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ , lo que es verdadero, porque en el instante  $t = 0$ , el modelo  $T(t) = 90 - 10t$ , tiene como resultado una temperatura de  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

En III) se afirma que la temperatura del líquido disminuye a razón de  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$  por minuto, lo que también es verdadero, ya que como se vio en la afirmación I) cada vez que el tiempo avanza en un minuto, la temperatura disminuye en  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

De lo anterior, se tiene que la opción correcta es E) y el distractor más marcado fue C) con una adhesión del 12%. Los postulantes que seleccionaron dicho distractor, posiblemente asumieron que el líquido fue vertido a una temperatura mayor que  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

### PREGUNTA 31

Un paciente evalúa costos en dos posibles centros de terapia, M y P. En M paga 1 UF por el contrato más 0,5 UF por cada sesión de terapia y en P paga  $\frac{2}{3}$  UF por cada sesión de terapia.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A) Es más conveniente el centro M, independiente del número de sesiones.
- B) Si decide contratar 4 sesiones de terapia, entonces debería optar por el centro M, que es el más conveniente.
- C) Las variables número de sesiones y costo asociado, para el centro M, son directamente proporcionales.
- D) Para un tratamiento de 6 sesiones se pagaría 4 UF en cualquiera de los centros de terapia.
- E) Es más conveniente el centro P, independiente del número de sesiones.

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje temático:** Álgebra

**Área Temática:** Funciones

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.

**Contenido:** Función lineal y afín.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** D

### COMENTARIO

El contenido involucrado en este ítem hace referencia a la función afín y lineal, su aplicación en la resolución de un problema y su relación con la proporcionalidad directa.

Para resolverlo se puede plantear la función que modela el costo a pagar en cada centro de terapia en términos del número de sesiones. Así, si  $x$  representa el número de sesiones a las que asiste un paciente, entonces el costo a pagar en el centro M se modela a través de la función  $f(x) = 1 + 0,5x$ , donde 1 representa el costo fijo del contrato en UF y en el centro P se modela a través de la función  $g(x) = \frac{2}{3}x$ .

Luego, para verificar las afirmaciones dadas en las opciones se puede construir una tabla de valores donde se visualice el costo a pagar que se derive de cada función, según el número de sesiones a las que asista un paciente, como se muestra a continuación:

x	f(x)	g(x)
1	1,5	0,6
2	2	1,3
3	2,5	2
4	3	2,6
5	3,5	3,3
6	4	4
7	4,5	4,6

Ahora, con los datos de esta tabla se puede determinar que las afirmaciones de las opciones A) y E) son falsas, ya que el centro de terapia que conviene depende del número de sesiones que tenga el paciente. La afirmación en B) también es falsa, pues al contratar 4 sesiones el costo a pagar es menor en el centro P, por lo que es más conveniente que M.

Por su parte, las variables número de sesiones y costo asociado para el centro M no son directamente proporcionales, debido a que no existe una razón de proporcionalidad  $k$ , tal que

$\frac{x}{f(x)} = k$ , pues  $\frac{1}{1,5} \neq \frac{2}{2}$ , por lo que la afirmación en C) es falsa.

Por último, se tiene que la afirmación en D) es la verdadera, porque al observar en la tabla el costo de un tratamiento de 6 sesiones, ambos centros cobran lo mismo, siendo esta opción la clave. El distractor E) fue el de mayor frecuencia, con un 23% de las preferencias, posiblemente los postulantes que lo marcaron consideraron solo tratamientos de menos de 6 sesiones, donde se verifica que el centro de terapia P es el más conveniente y lo proyectaron al resto de las sesiones.

### PREGUNTA 32

Si  $f$  y  $g$  son funciones con dominio el conjunto de los números reales definidas por  $f(x) = x - 3$  y  $g(x) = x - 1$ , entonces  $g(f(x))$  es igual a

- A)  $x - 1$
- B)  $2x - 4$
- C)  $x - 4$
- D)  $(x - 3)(x - 1)$
- E)  $(x - 3)(x - 1)x$

#### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Funciones

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender los conceptos y propiedades de la composición de funciones.

**Contenido:** Composición de funciones.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** C

### COMENTARIO

El ítem apunta a la determinación de la expresión que define a una función compuesta de dos funciones lineales,  $f$  y  $g$ , ambas con dominio el conjunto de los números reales. Para encontrar dicha función se procede de la siguiente manera:

Como  $f(x) = x - 3$  y  $g(x) = x - 1$ , entonces  $g(f(x)) = g(x - 3) = (x - 3) - 1 = x - 4$ , expresión que se encuentra en la opción C).

En relación a los distractores, el más seleccionado fue D), con una adhesión del 21%, posiblemente los postulantes que lo marcaron creen que  $g(f(x)) = f(x) \cdot g(x) = (x - 3)(x - 1)$ .

### PREGUNTA 33

Si  $f(x) = 3 \cdot 2^{1-x}$ , entonces  $f(-1)$  es

- A) 12
- B) 0
- C) 1
- D) 3
- E) 36

#### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Funciones

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Utilizar las funciones exponencial, logarítmica y raíz cuadrada como modelos de situaciones o fenómenos en contextos significativos y representarlas gráficamente en forma manual.

**Contenido:** Función exponencial.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** A

## COMENTARIO

En este caso, la pregunta está referida a la función exponencial, en particular el postulante debe determinar la imagen de  $-1$  según la función dada en el enunciado, es decir,  $f(-1) = 3 \cdot 2^{1-(-1)} = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$ , valor que se encuentra en la opción A).

Por otra parte, D) fue el distractor más marcado, con una adhesión del 10%. Es posible que los estudiantes que marcaron esta opción operan erróneamente en el exponente de la potencia, realizando el resto del desarrollo correctamente, es decir,  $f(-1) = 3 \cdot 2^{1-(-1)} = 3 \cdot 2^0 = 3 \cdot 1 = 3$ .

## PREGUNTA 34

En los rectángulos en que el largo ( $x$ ) es igual al doble del ancho, el área de ellos en función del largo es

- A)  $(2x)^2$
- B)  $2x^2$
- C)  $\frac{1}{4}x^2$
- D)  $x^2$
- E)  $\frac{1}{2}x^2$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área temática:** Funciones

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas.

**Contenido:** Modelamiento de situaciones o fenómenos asociados a funciones cuadráticas.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** E

## COMENTARIO

Esta pregunta apunta al contenido de modelamiento de una situación geométrica a través de una función cuadrática y para responderla, el postulante debe determinar la expresión que representa el área de una familia de rectángulos, la cual se determina multiplicando la medida del largo por la medida del ancho de los rectángulos.

Así, se debe determinar, en términos del largo, una expresión para la función  $f$  que define el área de cualquiera de los rectángulos de largo  $x$  y ancho  $\frac{x}{2}$ , donde el largo es igual al doble del

ancho, por lo que  $f(x) = x \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x^2$ .

Por lo tanto, la clave se encuentra en la opción E). Se tiene que B) fue el distractor más seleccionado, con el 29% de las preferencias. Posiblemente, el error de los postulantes que marcaron este distractor estuvo en la determinación de la expresión que representaba el ancho de los rectángulos en función del largo, interpretando que el ancho era el doble del largo, luego la expresión que representa al ancho de los rectángulos era  $2x$ , llegando a que la expresión que define la función pedida es  $2x^2$ .

### PREGUNTA 35

Si  $f(x) = 4^{-1}x^4$  tiene como dominio el conjunto de los números reales, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) El gráfico de  $f$  interseca a la recta de ecuación  $y = -x$  en dos puntos.
- II) El gráfico de  $f$  es el mismo que el gráfico de  $g(x) = 4^{-1}x^2$ .
- III) El gráfico de  $f$  está en el tercer y en el cuarto cuadrante.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) Solo I y II
- E) I, II y III

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Funciones

**Nivel:** Cuarto Medio

**Objetivo Fundamental:** Modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resultante sea la función potencia, inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones.

**Contenido:** Función potencia.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

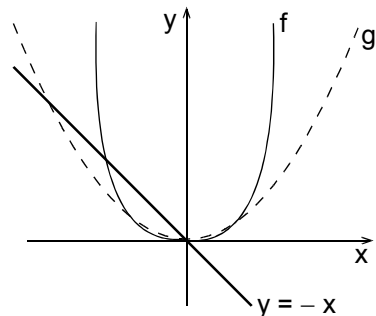
**Clave:** A

### COMENTARIO

Este ítem evalúa el contenido de la función potencia, donde el postulante para determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) puede analizar el gráfico de la función  $f(x) = 4^{-1}x^4$ .

Para resolver el ítem se puede esbozar el gráfico en un mismo plano cartesiano de la función  $f(x) = 4^{-1}x^4 = \frac{1}{4}x^4$ , de la función  $g(x) = 4^{-1}x^2 = \frac{1}{4}x^2$  y de la recta de ecuación  $y = -x$ , como se muestra en la siguiente figura y donde la imagen de algunos elementos del dominio de estas funciones aparecen en la tabla adjunta:

x	f(x)	g(x)	y = -x
-2	4	1	2
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
0	0	0	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-1
2	4	1	-2



En esta figura se observa que el gráfico de  $f$  intersecta a la recta de ecuación  $y = -x$  en dos puntos, además, este gráfico es distinto al gráfico de la función  $g$  y cabe señalar que está en el primer y segundo cuadrante. Por lo que, solo la afirmación en I) es verdadera, lo que implica que la clave es A).

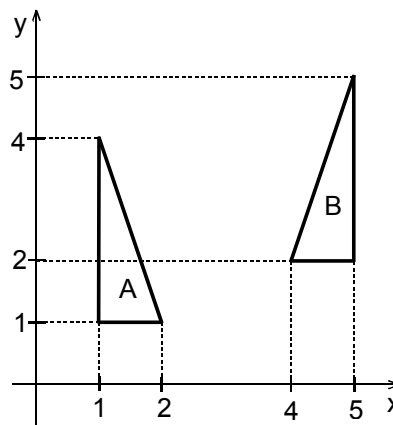
El distractor con mayor frecuencia fue C), con una adhesión del 6%, posiblemente quienes lo escogieron escriben  $f(x) = 4^{-1}x^4$  como  $f(x) = -4x^4$  y en este caso la gráfica de  $f$  tiene concavidad hacia abajo y por lo tanto, el gráfico respectivo está en el tercer y en el cuarto cuadrante y consideran falsa la afirmación en I) al no percatarse que el punto  $(0, 0)$  es un punto de intersección entre la gráfica de  $f$  y la recta.

### PREGUNTA 36

De acuerdo a la figura 4, ¿con cuál de las siguientes transformaciones isométricas en el plano, **NO** se puede obtener el triángulo B a partir del triángulo A?

- A) Con una simetría y luego con una traslación.
- B) Con una traslación y luego con una simetría.
- C) Con una traslación según el vector  $(4, 1)$  y luego con una rotación.
- D) Con tres simetrías y luego con una traslación.
- E) Con una traslación, luego con una simetría y después con otra traslación.

fig. 4



### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Posicional y Métrica

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas y utilizar la composición de funciones para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas.

**Contenido:** Transformaciones isométricas de figuras geométricas en el plano cartesiano.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

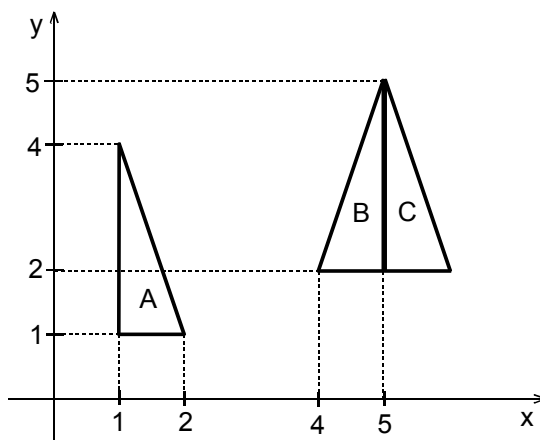
**Clave:** C

## COMENTARIO

Esta pregunta tiene relación con la composición de movimientos isométricos en el plano cartesiano, donde el postulante debe analizar las composiciones propuestas en las opciones para determinar con cuál de ellas no se puede obtener el triángulo B a partir del triángulo A.

Con las transformaciones mencionadas en las opciones A), B), D) y E), el triángulo B se puede obtener a partir del triángulo A, por ejemplo, en A) aplicando al triángulo A una simetría con respecto a la recta de ecuación  $x = 3$  y luego, una traslación según el vector  $(0, 1)$ . En B), aplicando las mismas transformaciones anteriores, pero invertido el orden. En D), aplicando tres veces seguidas la simetría indicada en A) y a continuación, la traslación mencionada en A). Ahora, en E) se puede aplicar una traslación al triángulo A según el vector  $(0, -1)$ , luego una simetría con respecto a la recta  $x = 3$  y por último, una traslación según el vector  $(0, 2)$ .

En cambio, en C) al aplicar una traslación al triángulo A según el vector  $(4, 1)$  se obtiene el triángulo C que se muestra en la siguiente figura:



Ahora bien, si se aplica una simetría axial al triángulo C, se obtiene el triángulo B, pero no existe una rotación que se pueda aplicar al triángulo C para obtener el triángulo B. Por lo que, la opción C) es la clave.

El distractor más seleccionado fue E), con una adhesión del 11%, es probable que los postulantes que marcaron esta opción consideraron que con la composición dada en C) se podía obtener B a partir de A, ya que realizaron bien la traslación, pero luego pensaron que se podría rotar el triángulo C con respecto a algunos de sus vértices para obtener el triángulo B y por otra parte, pensaron que la composición dada en E) no se podía al pensar que la segunda traslación debía ser la misma que la primera.



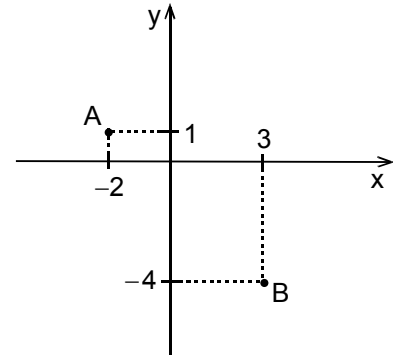
### PREGUNTA 37

Por los puntos A y B de la figura 5 se trazan paralelas al eje x y al eje y formándose un polígono. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) El polígono es un cuadrado.
- II)  $AB = 5\sqrt{2}$
- III) El perímetro del polígono es 20.

- A) Solo I
- B) Solo III
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

fig. 5



### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Posicional y Métrica

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas.

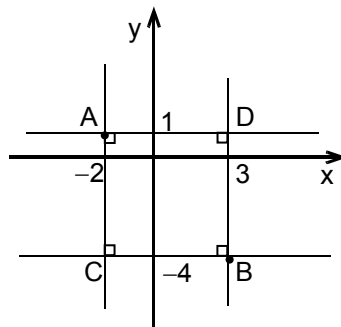
**Contenido:** Identificación del plano cartesiano y su uso para representar puntos y figuras geométricas.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** E

### COMENTARIO

Para resolver este ítem el postulante puede trazar las rectas que son paralelas a los ejes y que pasan por los puntos A y B, como se muestra en la siguiente figura, mostrándose el polígono ACBD, para luego verificar las afirmaciones dadas en I), en II) y en III).



En la figura se observa que todos los ángulos del polígono ACBD son rectos y todos los lados miden lo mismo, es decir, 5 unidades, por lo que este polígono es un cuadrado. Así, la afirmación en I) es verdadera.

Ahora, si se dibuja el  $\triangle ACB$  se puede aplicar el teorema de Pitágoras para determinar la medida de la hipotenusa  $\overline{AB}$ . En efecto,  $AB^2 = 5^2 + 5^2$ , de donde se obtiene que  $AB = 5\sqrt{2}$  unidades, por lo que la afirmación en II) también es verdadera.

Por último, como el perímetro de un polígono es la suma de las medidas de sus lados, se tiene que el perímetro del polígono ACBD es 20 unidades, lo que implica que la afirmación en III) es verdadera.

Por el desarrollo anterior, se tiene que las tres afirmaciones son verdaderas, luego la clave es E). El distractor D) fue el más marcado, con el 17% de las preferencias, posiblemente los postulantes que lo marcaron no aplicaron bien el teorema de Pitágoras para determinar la medida de  $\overline{AB}$ , o bien, utilizaron la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos y se equivocaron al efectuar algún cálculo.

### PREGUNTA 38

En un triángulo acutángulo ABC se traza la altura  $\overline{CD}$ , luego este segmento se prolonga de manera tal que  $CE = 2CD$  y D pertenece a  $\overline{CE}$ . ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

- I)  $\triangle ABC \cong \triangle ABE$
- II)  $\triangle ADC \cong \triangle ADE$
- III)  $\triangle ADE \cong \triangle BDC$

- A) Solo I
- B) Solo I y II
- C) Solo I y III
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Proporcional

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Conocer y utilizar conceptos y propiedades asociados al estudio de la congruencia de figuras planas, para resolver problemas y demostrar propiedades.

**Contenido:** Congruencia de figuras planas.

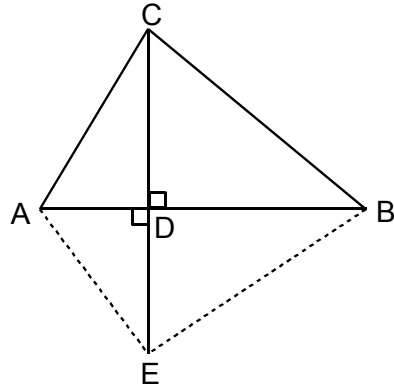
**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** B

### COMENTARIO

En este ítem, el postulante debe analizar las condiciones dadas en el enunciado, para construir la figura que representa dichas condiciones, para luego determinar la veracidad de las congruencias planteadas en I), en II) y en III), aplicando los criterios de congruencia de triángulos.

En efecto, al analizar las condiciones dadas en el enunciado se obtiene la figura adjunta, donde el  $\triangle ABC$  es acutángulo, D pertenece a  $\overline{CE}$ ,  $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ , ya que  $\overline{CD}$  es altura y  $\overline{CD} \cong \overline{DE}$ , pues  $CE = 2CD$ .



Como  $\overline{AB}$  es simetral de  $\overline{CE}$ , pues  $\overline{AB}$  intersecta perpendicularmente a  $\overline{CE}$  en su punto medio, se tiene que cualquier punto perteneciente a  $\overline{AB}$  está a igual distancia de los puntos C y E, por lo que  $AC = AE$  y  $BC = BE$ . Además, el lado  $\overline{AB}$  es común a los triángulos ABC y ABE, luego por el criterio de congruencia LLL, estos triángulos son congruentes, siendo la afirmación en I) verdadera.

La congruencia dada en II) también es verdadera, pues  $\overline{AD}$  es un lado común a los triángulos ADC y ADE,  $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADE = 90^\circ$  y  $CD = DE$ , lo que indica que por el criterio de congruencia LAL los triángulos señalados son congruentes.

Ahora, en III) se tiene que los triángulos ADE y BDC tienen los lados  $\overline{CD}$  y  $\overline{DE}$  de igual medida y los ángulos ADE y CDB iguales a  $90^\circ$ , pero no necesariamente los segmentos AD y DB son congruentes o los segmentos AE y BC lo son, por lo que los triángulos ADE y BDC no siempre son congruentes.

Por el análisis anterior, se tiene que como solo las congruencias dadas en I) y en II) son verdaderas, la clave es B) y el distractor más seleccionado fue E), con una adhesión del 15%. Es posible que los postulantes que marcaron esta opción no se percataran que la congruencia planteada en III) solo es verdadera cuando el triángulo ABC es equilátero o isósceles.

**PREGUNTA 39**

Si  $a < 0$ , entonces la magnitud del vector  $(-a)(a^2, a^2)$  es

- A)  $\sqrt{2} a^2$
- B)  $-a^5$
- C)  $-a$
- D)  $2a^3$
- E)  $-\sqrt{2} a^3$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Posicional y Métrica

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas.

**Contenido:** Vectores en el plano cartesiano.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** E

### COMENTARIO

En este caso, la pregunta apunta a la magnitud de un vector, donde el postulante debe saber que la magnitud de  $\vec{v}(x, y)$  se determina a través de la fórmula  $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Como  $a < 0$ , la magnitud del vector  $(-a)(a^2, a^2)$  se puede traducir como  $(-a)$  veces la magnitud del vector  $(a^2, a^2)$ , la que se calcula de la siguiente manera:

$$(-a) \cdot \sqrt{(a^2)^2 + (a^2)^2} = (-a) \cdot \sqrt{a^4 + a^4} = (-a) \cdot \sqrt{2a^4} = (-a) \cdot a^2\sqrt{2} = -\sqrt{2}a^3$$

Dicha expresión se encuentra en la opción E). El 10% de los postulantes marcó el distractor D), siendo éste el más seleccionado, posiblemente estos postulantes ponderaron el vector por el escalar, es decir,  $(-a)(a^2, a^2) = (-a^3, -a^3)$  y a este vector le calcularon su magnitud, cometiendo un error al extraer raíz de la expresión y no consideraron el signo de  $a$ , o sea, la magnitud de  $(-a^3, -a^3)$  la determinan como  $\sqrt{(-a^3)^2 + (-a^3)^2} = \sqrt{a^6 + a^6} = \sqrt{a^6} + \sqrt{a^6} = a^3 + a^3 = 2a^3$

### PREGUNTA 40

En el trazo AB de la figura 6,  $AB : CD = 6 : 1$  y  $AC : DB = 3 : 2$ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A)  $AB : DB = 3 : 2$
- B)  $AD : AC = 4 : 3$
- C)  $CD : AD = 1 : 3$
- D)  $CB : AC = 3 : 2$
- E)  $AB : DB = 6 : 3$

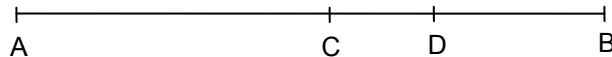


fig. 6

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Proporcional

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

**Contenido:** División interior de un trazo en una razón dada.

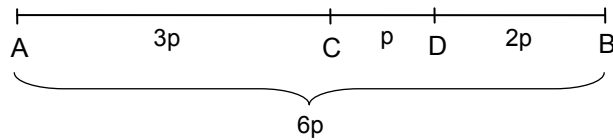
**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** B

## COMENTARIO

Para resolver este ítem el postulante puede aplicar la división interior de un segmento en una razón dada para determinar cuál de las proporciones dadas en las opciones es la verdadera, teniendo en consideración que  $PQ : RS = m : n$  es equivalente a  $\frac{PQ}{RS} = \frac{m}{n}$ .

Así, del enunciado se tiene que el segmento  $\overline{AB}$  está dividido por  $\overline{CD}$  en la proporción  $AB : CD = 6 : 1$ , luego si  $\overline{CD}$  mide  $p$  unidades, entonces  $\overline{AB}$  mide  $6p$  unidades y  $AC + DB = 5p$  unidades. Por otra parte, se tiene del enunciado que  $AC : DB = 3 : 2$ , de manera que se puede determinar que  $AC = 3p$  unidades y  $DB = 2p$  unidades. Lo anterior se puede representar en la siguiente figura:



Luego, al reemplazar las expresiones en las proporciones dadas en las opciones se tiene que:

- A)  $\frac{AB}{DB} = \frac{6p}{2p} = \frac{3}{1} \neq \frac{3}{2}$
- B)  $\frac{AD}{DC} = \frac{4p}{3p} = \frac{4}{3}$
- C)  $\frac{CD}{AD} = \frac{p}{4p} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}$
- D)  $\frac{CB}{AC} = \frac{3p}{3p} = \frac{1}{1} \neq \frac{3}{2}$
- E)  $\frac{AB}{DB} = \frac{6p}{2p} = \frac{3}{1} \neq \frac{6}{3}$

Del desarrollo anterior, la clave es B) y en relación a los distractores, los postulantes que erraron la respuesta se distribuyeron de manera muy similar entre todos ellos, lo más probable es que estos postulantes se equivocan en la determinación de alguna de las expresiones que determinaban los segmentos involucrados en la pregunta.

## PREGUNTA 41

Un poste proyecta una sombra de 120 metros en el suelo horizontal y en el mismo instante otro poste cercano a él, que mide 6 metros de altura, paralelo al anterior, proyecta una sombra en el suelo horizontal de 90 metros. ¿Cuál es la diferencia positiva entre las alturas de los postes?

- A) 30 metros
- B) 36 metros
- C) 2 metros
- D) 8 metros
- E) 2,5 metros

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Proporcional

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

**Contenido:** Teorema de Thales.

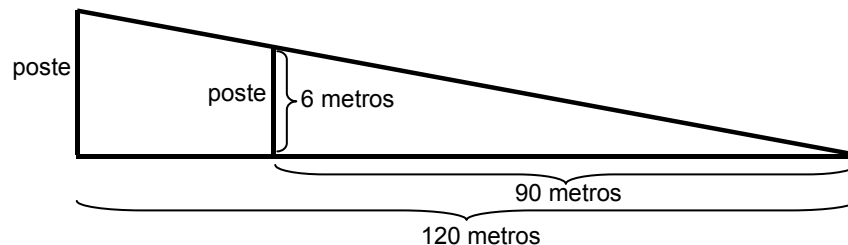
**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** C

### COMENTARIO

El contenido involucrado en este ítem es el teorema de Thales y para resolverlo el postulante puede realizar un análisis de los datos entregados en el enunciado y representarlos a través de una figura.

Así, en el enunciado se indica que hay un poste que proyecta una sombra de 120 metros en el suelo horizontal y en el mismo instante, otro edificio paralelo al anterior que tiene una altura de 6 metros, proyecta una sombra de 90 metros, esta situación se puede representar en la siguiente figura:



Si se designa por  $x$  a la altura del poste más alto se puede plantear la siguiente igualdad aplicando el Teorema de Thales,  $\frac{x}{120} = \frac{6}{90}$ , de donde se llega a  $x = 8$  metros, luego la diferencia positiva entre las alturas de los postes está dada por 8 metros menos 6 metros, que da 2 metros, resultado que se encuentra en la opción C).

El distractor más marcado fue D) con un 16% de las preferencias, seguramente los que marcaron esta opción, solo calculan la altura del edificio más alto.

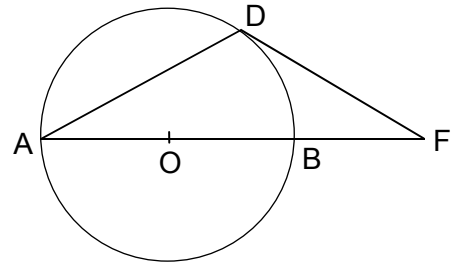
## PREGUNTA 42

En la figura 7,  $\overline{AB}$  es diámetro de la circunferencia de centro O,  $\overline{AD}$  es una cuerda, el  $\sphericalangle DAB = 30^\circ$  y la recta FD tangente a la circunferencia en el punto D intersecta a la prolongación de  $\overline{AB}$  en F. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) Los triángulos AOD, FBD y ADF son semejantes entre sí.
- II) Los triángulos ODF y BDA son semejantes entre sí.
- III) El triángulo ADF es rectángulo.

- A) Solo III
- B) Solo I y II
- C) Solo I y III
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

fig. 7



### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Proporcional

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

**Contenido:** Criterios de semejanza de triángulos.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** B

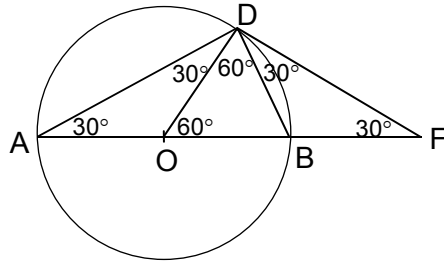
### COMENTARIO

Para responder la pregunta el postulante debe aplicar los criterios de semejanza de triángulos y en este caso, puede aplicar el criterio que dice que dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos correspondientes de igual medida.

Ahora bien, para determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) se determinarán los ángulos de los triángulos mencionados en estas afirmaciones. Así, como  $\sphericalangle DAB = 30^\circ$  se tiene que  $\sphericalangle ODA = 30^\circ$ , ya que  $\triangle AOD$  es isósceles al ser los segmentos AO y DO radios de la circunferencia.

Por otro lado,  $\sphericalangle DOB = \sphericalangle DAO + \sphericalangle ODA = 60^\circ$  y como  $\triangle ODB$  es isósceles al ser los segmentos OD y OB radios de la circunferencia, se tiene que  $\sphericalangle ODB = \sphericalangle OBD = 60^\circ$ . Además, como la recta FD es tangente a la circunferencia en el punto D se tiene que  $\sphericalangle ODF$  es de  $90^\circ$  y como  $\sphericalangle ODF = \sphericalangle ODB + \sphericalangle BDF$  se obtiene que  $\sphericalangle BDF = 30^\circ$ . Por último, como  $\triangle ODF$  es rectángulo en D y  $\sphericalangle DOB = 60^\circ$  se tiene que  $\sphericalangle OFD = 30^\circ$ .

Lo anterior se plasmó en la siguiente figura:



Ahora, la afirmación en I) es verdadera, pues los triángulos AOD, FBD y ADF tienen sus ángulos respectivos de igual medida, es decir,  $30^\circ$ ,  $30^\circ$  y  $120^\circ$ , por lo tanto, aplicando el criterio de semejanza antes descrito se tiene que los tres triángulos son semejantes.

La afirmación II) también es verdadera, porque los ángulos correspondientes de los triángulos ODF y BDA son iguales y miden  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $90^\circ$ .

En la afirmación III) se señala que el triángulo ADF es rectángulo, esto es falso, porque los ángulos del triángulo mencionado miden  $30^\circ$ ,  $30^\circ$  y  $120^\circ$ .

Por lo anterior, la clave es B) y el distractor que obtuvo la mayor frecuencia fue D), con un 10% de las preferencias, probablemente los postulantes que lo marcaron pensaron que la afirmación en I) es falsa, porque los triángulos son de distinto tamaño y piensan que la afirmación en III) es verdadera, pues al ser la recta FD tangente a la circunferencia en el punto D, asumen que  $\sphericalangle ADF = 90^\circ$ .

### PREGUNTA 43

El plano de un dormitorio rectangular está a una escala de 1 : 10. Si el largo del dormitorio en el plano es de 60 cm y el ancho es de 50 cm, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) El ancho del dormitorio es de 5 m.
- II) Si en el dormitorio hay una cama de 2 m de largo, entonces en el plano la representación de la cama tiene un largo de 0,2 m.
- III) Si se quiere ampliar el largo del dormitorio en 1,5 m, entonces el largo del dormitorio en el nuevo plano sería de 75 cm.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III



## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Proporcional

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

**Contenido:** Semejanza de figuras planas.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** E

### COMENTARIO

Este ítem apunta a figuras que están a escala una de otra, es decir, dos figuras que poseen la misma forma, sin importar el tamaño, lo cual se traduce a que las dos figuras son semejantes.

En este caso, en el enunciado se indica que el plano de un dormitorio rectangular está a una escala de 1 : 10, lo que quiere decir, que en el plano las medidas del dormitorio representan la décima parte de las medidas reales, o sea,  $\frac{\text{medida en el plano}}{\text{medida real}} = \frac{1}{10}$ .

Ahora, si se designa por x el ancho del dormitorio y como se sabe que este ancho en el plano mide 50 cm, se plantea la igualdad  $\frac{50}{x} = \frac{1}{10}$ , de donde se obtiene que x = 500 cm, lo que es equivalente a que el ancho del dormitorio es 5 m, luego la afirmación en I) es verdadera.

Para comprobar la veracidad de la afirmación dada en II) se tiene que determinar que una cama que mide 2 m de largo en la representación en el plano debiese medir 0,2 m, para ello se designará por p el largo de la cama en el plano y se planteará la proporción  $\frac{p}{2} = \frac{1}{10}$ , llegando a que el largo de la cama en el plano es 0,2 m, por lo que la afirmación en II) es verdadera.

Ahora, para ampliar en 1,5 m el largo del dormitorio, primero se calculará este largo, para luego calcular el largo del dormitorio representado en el nuevo plano a escala. Es así como, el largo en el plano sin el aumento es de 60 cm y considerando q como el largo del dormitorio se plantea la proporción  $\frac{60}{q} = \frac{1}{10}$  llegando a que q es 600 cm, si se le agregan 1,5 m que equivalen a 150 cm, se tiene que el nuevo largo del dormitorio sería de 750 cm, y si se considera a r como este largo en el nuevo plano se tiene la proporción  $\frac{r}{750} = \frac{1}{10}$ , luego el largo del dormitorio en el nuevo plano es 75 cm, por lo tanto, la afirmación en III) también es verdadera.

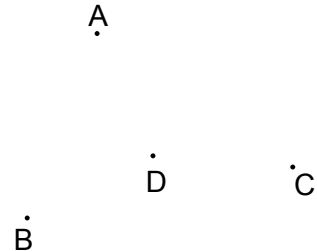
Por lo anterior, la clave es E) y el distractor con mayor frecuencia fue C), con un 14% de adhesión, probablemente quienes marcaron esta opción cometen el error en la transformación de 1,5 m a cm o no realizan la transformación de unidades de medida y solo suman los números.

#### PREGUNTA 44

En la figura 8 los puntos A, B y C están a igual distancia del punto D y los puntos D y C están a un mismo lado de la recta AB. Si  $\sphericalangle ABD = \alpha$ , ¿cuánto debe medir el ángulo ACB para que  $\alpha$  sea **siempre** menor que  $40^\circ$ ?

- A) Más de  $50^\circ$ .
- B) Menos de  $20^\circ$ .
- C) Menos de  $50^\circ$ .
- D) Más de  $40^\circ$ .
- E) Menos de  $100^\circ$ .

fig. 8



#### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Posicional y Métrica

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia, y relacionar las medidas de dichos ángulos.

**Contenido:** Ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia.

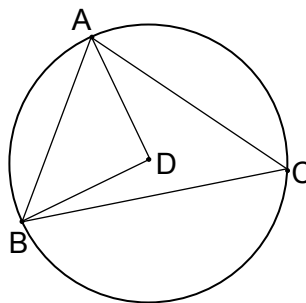
**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** A

#### COMENTARIO

Para dar respuesta al ítem el postulante debe realizar un análisis de las condiciones dadas en el enunciado para los puntos de la figura, dibujar líneas auxiliares y aplicar las propiedades de ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia, en particular la propiedad que indica que la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco de un ángulo del centro mide la mitad de éste.

En efecto, como A, B y C están a igual distancia del punto D, se tiene que existe una circunferencia con centro en D que pasa por estos tres puntos, como se visualiza en la siguiente figura, donde además, aparecen los ángulos utilizados en la resolución del ítem:



Ahora, como  $\sphericalangle ABD = \alpha$ , entonces  $\sphericalangle BAD = \alpha$ , pues  $\triangle BDA$  es isósceles cuyos lados son radios de la circunferencia. Como se quiere que  $\alpha$  sea siempre menor que  $40^\circ$  se tiene que  $\sphericalangle ADB$  debe ser siempre mayor que  $100^\circ$ , ya que  $\sphericalangle ABD + \sphericalangle BAD + \sphericalangle ADB = 180^\circ$  y como  $\sphericalangle ADB$  es un ángulo del centro que subtiende el mismo arco de  $\sphericalangle ACB$ , y aplicando la propiedad mencionada en el primer párrafo se deduce que éste debe medir más de  $50^\circ$ . Luego, la clave es A).

Con respecto a los distractores, todos tuvieron una frecuencia similar entre ellos, y esto se debe a que probablemente los postulantes no supieron realizar un análisis de las condiciones del problema o no supieron aplicar las propiedades de los ángulos inscritos y del centro en una circunferencia.

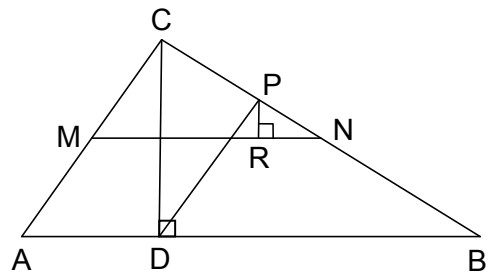
### PREGUNTA 45

El triángulo ABC de la figura 9 es rectángulo en C, M y N son los puntos medios de los lados respectivos, D está en  $\overline{AB}$ , P en  $\overline{CN}$ , R en  $\overline{MN}$  y  $\overline{DP} \perp \overline{CB}$ . Si  $CD = 4$  cm y  $DB = 8\sqrt{2}$  cm, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I)  $\triangle PRN \sim \triangle ACB$
- II) El área del triángulo ABC es  $18\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>.
- III)  $CN = 6$  cm

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

fig. 9



### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Proporcional

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

**Contenido:** Teorema de Euclides

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** E

### COMENTARIO

El contenido relacionado a esta pregunta es el de la aplicación del teorema de Euclides, en este caso el teorema que hace referencia a que la medida de un cateto al cuadrado es igual al producto de su proyección sobre la hipotenusa por la medida de la hipotenusa y al teorema que hace referencia a que la altura trazada hacia la hipotenusa al cuadrado, es igual al producto entre los dos segmentos que se determinan sobre la hipotenusa. Además, el postulante para resolver el ítem debe aplicar los criterios de semejanza de triángulos.

Ahora, en la figura se designará por  $\alpha$  al ángulo ABC, además como  $\overline{MN}$  es mediana, entonces es paralela a  $\overline{AB}$ , de donde se concluye que  $\sphericalangle RNP = \alpha$ , por ser ángulos correspondientes entre paralelas, por otro lado,  $\sphericalangle ACB = \sphericalangle PRN = 90^\circ$ , debido a que los triángulos PRN y ACB son rectángulos, así se concluye que estos son semejantes, por el criterio de semejanza de triángulos ángulo-ángulo, luego la afirmación en I) es verdadera.

Para calcular el área del triángulo ABC y verificar si es la misma que se plantea en la afirmación II), se aplicará el teorema de Euclides relacionado con la altura  $\overline{CD}$ , con la finalidad de determinar la medida de  $\overline{AD}$ , esto es,  $CD^2 = AD \cdot DB$ , reemplazando por  $CD = 4$  cm y  $DB = 8\sqrt{2}$  cm, se tiene que  $4^2 = AD \cdot 8\sqrt{2}$ , llegando a que  $AD = \sqrt{2}$  cm. Ahora, como  $AB = AD + DB$  y el área del triángulo ABC está dado por la expresión  $\frac{AB \cdot DC}{2}$  se tiene que  $\frac{9\sqrt{2} \cdot 4}{2} = 18\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup> es el área del triángulo ABC, luego la afirmación dada en II) es verdadera.

Por último, para verificar la medida del segmento CN dada en III), se puede determinar la medida del segmento CB a través del teorema de Euclides que hace referencia a un cateto, esto es,  $CB^2 = DB \cdot AB$ , reemplazando se tiene  $CB^2 = 8\sqrt{2} \cdot 9\sqrt{2} = 72 \cdot 2 = 144$  cm<sup>2</sup>, luego  $CB = 12$  cm y como N es punto medio de  $\overline{CB}$  se tiene que  $CN = 6$  cm, por lo tanto, la afirmación en III) es verdadera.

Por lo anterior, la clave es E) y el distractor más llamativo es D), con un 9% de las preferencias, posiblemente los que erraron el ítem cometen algún error en los cálculos para determinar el área del triángulo.

#### PREGUNTA 46

Una ecuación de la recta que pasa por los puntos (3, 0) y (-1, 0) del plano cartesiano es

- A)  $y = -4x + 3$
- B)  $y = -4(x + 1)$
- C)  $y = 4(x + 1)$
- D)  $y = 0$
- E)  $y = 2(x - 3)$

#### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Posicional y Métrica

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

**Contenido:** Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** D

#### COMENTARIO

El postulante para responder la pregunta debe comprender que un punto que tiene ordenada igual a 0 está ubicado en el eje x, por lo tanto los puntos (3, 0) y (-1, 0) están en el eje x. Ahora, lo que se pide es la ecuación que pasa por estos puntos, es decir, la ecuación de este eje, siendo esta  $y = 0$ , la cual se encuentra en la opción D).

Este ítem también se puede resolver a través de la fórmula de una recta que pasa por dos puntos, esto es, sean  $P(a, b)$  y  $Q(c, d)$  dos puntos que pertenecen a una recta, entonces la fórmula para encontrar la ecuación de dicha recta es  $(y - b) = \frac{b - d}{a - c}(x - a)$ .

El distractor más marcado fue E) con un 8% de las preferencias, posiblemente el postulante utilizó la fórmula antes mencionada, pero cometió un error al calcular la pendiente, escribiendo  $\frac{3 - 1}{0 - 0} = 2$ .

## PREGUNTA 47

Si la ecuación de una recta es  $10x - 2y = 20$ , ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) La pendiente de la recta es 10.
- II) La gráfica de la recta intersecta al eje y en el punto  $(0, 20)$ .
- III) La gráfica de la recta intersecta al eje x en el punto  $(2, 0)$ .

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) Solo I y II
- E) I, II y III

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Posicional y Métrica

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

**Contenido:** Interpretación de la pendiente y del intercepto de una recta con el eje de las ordenadas.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** C

## COMENTARIO

Este ítem hace referencia a la pendiente de una recta y a la intersección de ésta con los ejes coordenados, para resolverlo se tiene que recordar que un punto de coordenadas  $(x, 0)$  pertenece al eje x, y que un punto de coordenadas  $(0, y)$  pertenece al eje y. Además, se debe recordar que en la ecuación de una recta de la forma  $y = mx + n$ ,  $m$  es la pendiente y  $n$  el coeficiente posición.

De la expresión  $10x - 2y = 20$  se tiene que  $y = 5x - 10$ , por lo que la pendiente de la recta es 5, luego la afirmación dada en I) es falsa.

Ahora, para verificar la afirmación en II) se tiene que buscar el punto donde la recta intersecta al eje y, para ello se tiene que el coeficiente de posición es  $-10$ , luego en el punto  $(0, -10)$  la recta intersecta al eje y, por lo tanto, la afirmación en II) es falsa.

Por último, para encontrar el punto donde la recta intersecta al eje x, se debe encontrar el valor de x cuando  $y = 0$  en la ecuación de la recta, obteniéndose que  $0 = 5x - 10$ , de donde  $5x = 10$ , llegando a que  $x = 2$ , luego la recta intersecta al eje x en el punto  $(2, 0)$ , concluyéndose que la afirmación en III) es verdadera.

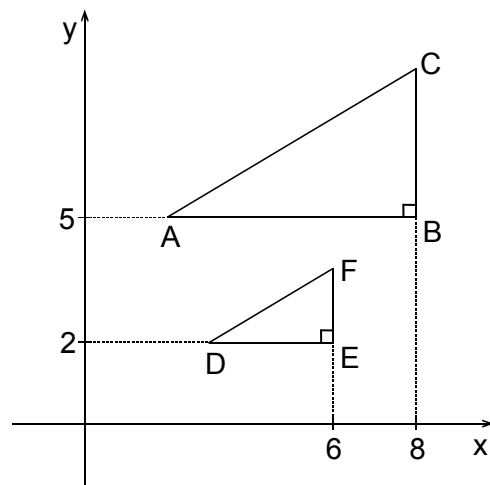
Por lo anterior, la clave es C). El distractor más marcado fue D) con un 9% de las preferencias, probablemente los postulantes no transformaron la ecuación de la recta a la forma  $y = mx + n$ , determinando la pendiente y el coeficiente de posición de la ecuación de la recta tal cual fue presentada en el enunciado, contestando que la recta tiene pendiente 10 y que su gráfica intersecta al eje y en el punto  $(0, 20)$ . Además, pueden haber llegado a otro punto de intersección con el eje x al despejar de forma errónea la variable x en la ecuación  $0 = 5x - 10$ , por lo que les dio falsa la afirmación en III).

### PREGUNTA 48

Si en el gráfico de la figura 10, el  $\triangle DEF$  es el homotético del  $\triangle ABC$  con centro de homotecia el punto  $(4, -1)$ , ¿cuál es la razón de homotecia?

- A) 1 : 2
- B)  $\sqrt{13} : 1$
- C) 1 : 1
- D)  $1 : \sqrt{2}$
- E) No se puede determinar.

fig. 10



### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Proporcional

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

**Contenido:** Homotecia de figuras planas.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

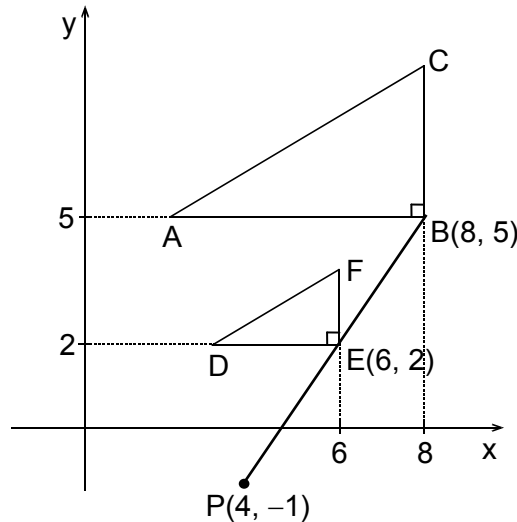
**Clave:** A

### COMENTARIO

Este ítem apunta al contenido de homotecia de figuras planas y para resolverlo el postulante debe determinar la razón de homotecia que transforma el triángulo ABC en el triángulo DEF. Para ello puede utilizar la fórmula de distancia entre dos puntos, para determinar la medida de algunos

segmentos, es decir, la distancia entre los puntos  $M(x_1, y_1)$  y  $N(x_2, y_2)$  es  $d_{\overline{MN}} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .

Sea  $P(4, -1)$  el centro de homotecia, luego los puntos  $P$ ,  $E$  y  $B$  son colineales, tal como se muestra en la siguiente figura:



Al ser el  $\triangle DEF$  el homotético del  $\triangle ABC$ , la razón de homotecia está dada por  $\frac{PE}{PB}$ . Como  $PE = \sqrt{(6-4)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{13}$  unidades y  $PB = \sqrt{(8-4)^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$  unidades, por lo que  $\frac{PE}{PB} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{13}} = \frac{1}{2}$ , es decir, la razón de homotecia es 1 : 2, la cual se encuentra en la opción A).

Entre los distractores, el que obtuvo mayor frecuencia fue E) con un 22% de las preferencias, es probable que los postulantes que lo abordaron creen que al no poder determinar la medida de los lados de los triángulos, no se puede determinar la razón de homotecia.

#### PREGUNTA 49

Si  $P$  y  $Q$  son dos puntos ubicados en el eje de las ordenadas que están a una distancia de  $\sqrt{10}$  del punto  $(1, 2)$ , entonces la distancia entre  $P$  y  $Q$  es

- A) 4
- B) 6
- C)  $2\sqrt{6}$
- D) 10
- E)  $2\sqrt{10}$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Posicional y Métrica

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

**Contenido:** Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** B

### COMENTARIO

El postulante para resolver el ítem puede aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos. Así, como P y Q están ubicados en el eje de las ordenadas, se tiene que sus abscisas son iguales a 0, es decir, se pueden escribir de la forma  $P(0, y_1)$  y  $Q(0, y_2)$ . Además, ambos puntos están a una distancia  $\sqrt{10}$  del punto  $(1, 2)$ , entonces para calcular las ordenadas de los puntos se aplica la fórmula de distancia del punto  $(1, 2)$  a cualquiera de los otros puntos. Si se considera en este caso el punto  $P(0, y_1)$ , se tiene que  $\sqrt{(1-0)^2 + (2-y_1)^2} = \sqrt{10}$ , lo que es equivalente a  $\sqrt{1+4-4y_1+(y_1)^2} = \sqrt{10}$ , que es lo mismo que  $(y_1)^2 - 4y_1 - 5 = 0$ , de donde  $(y_1 - 5)(y_1 + 1) = 0$ , concluyendo que los puntos buscados son  $P(0, 5)$  y  $Q(0, -1)$ .

Por último, la distancia entre P y Q es  $\sqrt{(0-0)^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{6^2} = 6$ , resultado que se encuentra en la opción B).

C) fue el distractor más llamativo, con un 11% de las preferencias y el error que posiblemente cometieron los postulantes fue que consideraron que los puntos P y Q pertenecían al eje de las abscisas en vez del eje de las ordenadas, escribiéndolos como  $P(y_1, 0)$  y  $Q(y_2, 0)$ .

### PREGUNTA 50

Si  $(a, b)$  son las coordenadas del punto de intersección de las rectas  $L: x - y - 5 = 0$  y  $L': 2x - y - 3 = 0$ , entonces  $(a + b)$  es igual a

- A) -21
- B) -9
- C) -5
- D) 9
- E) 21



## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Posicional y Métrica

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Establecer la relación entre la representación gráfica de rectas en el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones a que dan origen.

**Contenido:** Relación entre la representación gráfica de rectas en el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones lineales.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** B

### COMENTARIO

Para dar respuesta a la pregunta el postulante puede relacionar la representación gráfica de rectas en el plano, en este caso la intersección de dos rectas, con la resolución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

Así, como en el enunciado se señala que  $(a, b)$  son las coordenadas del punto de intersección de dos rectas, cuyas ecuaciones son  $L: x - y - 5 = 0$  y  $L': 2x - y - 3 = 0$ , se debe resolver el sistema  $\begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$  para encontrar dicho punto y determinar el valor de  $(a + b)$ .

Aplicando cualquiera de los métodos de resolución de un sistema, en este caso, el método de reducción, se tiene el siguiente desarrollo:

$$\begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{es equivalente a}$$
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad \text{restando ambas ecuaciones se tiene que}$$

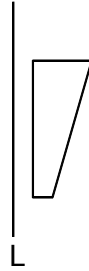
$x = -2$ , valor que al ser reemplazado en  $x - y = 5$  se obtiene  $y = -7$ , luego  $(a, b) = (-2, -7)$ , de donde  $(a + b) = -9$ , valor que se encuentra en la opción B).

El distractor D) fue el más llamativo y obtuvo una frecuencia del 19%, posiblemente los postulantes que lo marcaron al sumar  $a$  y  $b$  aplicaron la propiedad de los signos para multiplicar dos números negativos, obteniendo  $(-2 + -7) = 9$ .

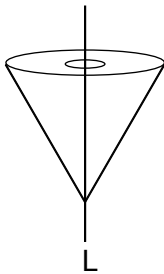
### PREGUNTA 51

Si se hace girar en forma indefinida el cuadrilátero de la figura 11 en torno a la recta L, ¿cuál de las siguientes opciones representa mejor el cuerpo generado?

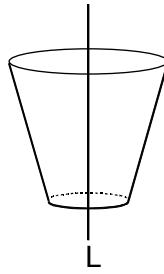
fig. 11



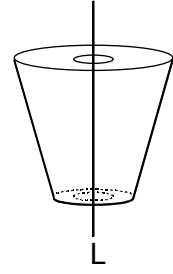
A)



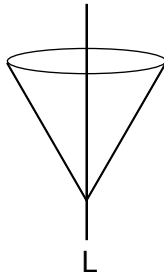
B)



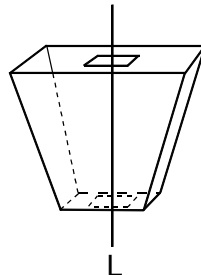
C)



D)



E)



### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Posicional y Métrica

**Nivel:** Cuarto Medio

**Objetivo Fundamental:** Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio.

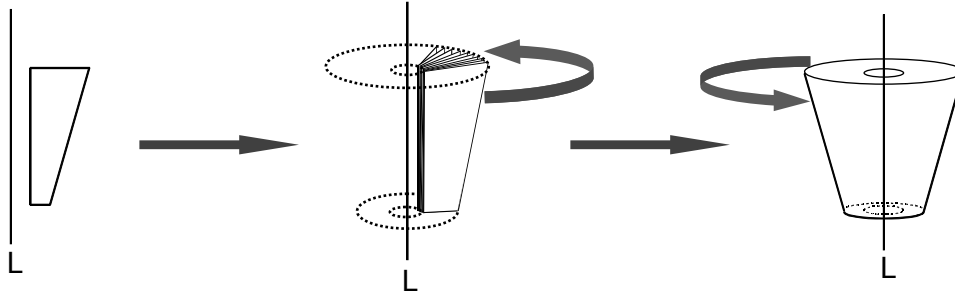
**Contenido:** Cuerpos generados a partir de la rotación de figuras planas.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** C

## COMENTARIO

Para resolver este ítem el postulante debe ser capaz de determinar el tipo de cuerpo que se genera al hacer girar de manera indefinida el cuadrilátero de la figura en torno a la recta L. De esta manera, se tiene que:



De lo anterior la clave es C) y el distractor con mayor frecuencia fue B) con un 12% de las preferencias, posiblemente los postulantes que lo escogieron olvidaron considerar la separación que hay entre la recta L y el cuadrilátero de la figura, sin darse cuenta que en el cuerpo generado queda en el centro un espacio en forma de cilindro.

## PREGUNTA 52

¿Cuál de las siguientes expresiones representa **siempre** la distancia entre un punto  $P(a, b, c)$  y su simétrico con respecto al eje  $x$ ?

- A)  $2a$
- B)  $\sqrt{2b^2 + 2c^2}$
- C)  $2\sqrt{b^2 + c^2}$
- D)  $4b^2 + 4c^2$
- E)  $2b + 2c$

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Posicional y Métrica

**Nivel:** Cuarto Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio.

**Contenido:** Distancia entre dos puntos ubicados en un sistema de coordenadas en tres dimensiones.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** C

## COMENTARIO

El postulante para resolver el ítem debe analizar cuál de las expresiones presentadas en las opciones corresponde siempre a la distancia entre un punto ubicado en un sistema de coordenadas de tres dimensiones y su simétrico con respecto al eje  $x$ .

Para ello, el postulante debe recordar que la fórmula de distancia (d) entre los puntos  $A(x_1, y_1, z_1)$  y  $B(x_2, y_2, z_2)$  en el espacio está dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Además, se debe tener presente que si un punto M es el simétrico de un punto N con respecto a una recta L, se cumple que la distancia desde el punto M a la recta L es igual a la distancia desde la recta L al punto N, en otras palabras, la distancia entre el punto M y el punto N es igual al doble de la distancia entre el punto M y la recta L o al doble de la distancia entre el punto N y la recta L.

Como el eje x corresponde a una recta, bastará con determinar la distancia que hay entre el punto P y el eje x y multiplicarla por 2 para obtener la distancia entre P y su punto simétrico.

Ahora bien, un punto cualquiera en el eje x es de la forma  $(m, 0, 0)$ , con m un número real y para calcular la distancia entre el eje x y el punto  $P(a, b, c)$ , se debe considerar  $m = a$ , esto porque se entiende por distancia, entre una recta y un punto, a la menor distancia entre todos los posibles puntos del eje x con el punto P.

Luego, la distancia entre el punto P y el eje x corresponde a la distancia entre el punto  $P(a, b, c)$  y el punto  $(a, 0, 0)$ , desarrollo que se presenta a continuación:

$$d = \sqrt{(a - a)^2 + (b - 0)^2 + (c - 0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Por lo tanto,  $2\sqrt{b^2 + c^2}$  corresponde a la distancia entre el punto P y su simétrico con respecto al eje x, expresión que se encuentra en la opción C).

El distractor de mayor frecuencia fue B) con un 26% de las preferencias, posiblemente quienes optaron por este distractor encontraron que el punto simétrico de  $P(a, b, c)$  es  $(a, -b, -c)$  pero al determinar la distancia entre estos puntos, no elevaron al cuadrado los términos numéricos, sino solamente los literales como se muestra a continuación:

$$\sqrt{(a - a)^2 + (b - (-b))^2 + (c - (-c))^2} = \sqrt{(0)^2 + (2b)^2 + (2c)^2} = \sqrt{2b^2 + 2c^2} .$$

### PREGUNTA 53

Dado el triángulo de vértices  $A(3, 0, 0)$ ,  $B(-1, 4, 0)$  y  $C(-1, 1, 3)$ , ¿cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la ecuación de la recta que pasa por el vértice  $C$  y por el punto medio de  $\overline{AB}$ ?

A)  $\frac{x+1}{2} = y-1 = \frac{3-z}{3}$

B)  $-x+2 = y-2 = \frac{z}{3}$

C)  $x+2 = \frac{y+1}{2} = z-3$

D)  $x+1 = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{3}$

E) Ninguna de las anteriores.

#### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Posicional y Métrica

**Nivel:** Cuarto Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio.

**Contenido:** Ecuación de la recta en el espacio.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** A

#### COMENTARIO

En este ítem el postulante puede determinar la ecuación vectorial de la recta en el espacio que pasa por dos puntos, la que es de la forma  $(x, y, z) = \vec{p} + \lambda \vec{d}$ , donde  $\vec{p}$  es un vector posición,  $\vec{d}$  es un vector director y  $\lambda$  un escalar que pertenece al conjunto de los números reales.

Además, el postulante debe recordar que el punto medio entre los puntos  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$  está dado por  $M = \left( \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2} \right)$ .

Ahora, para responder la pregunta, se debe encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto medio de  $\overline{AB}$  y por el punto  $C$ .

El punto medio de  $\overline{AB}$  es  $M = \left( \frac{-1+3}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (1, 2, 0)$ , luego con este punto y el punto  $C(-1, 1, 3)$ , se puede determinar la ecuación vectorial de la recta en el espacio, donde un vector director de esta recta, obtenido de los puntos  $M$  y  $C$ , puede ser  $\vec{d} = (1 - (-1), 2 - 1, 0 - 3) = (2, 1, -3)$ , luego con este vector director y considerando el punto  $C$  como vector posición, se puede determinar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto  $M$  y el punto  $C$ , la cual es  $(x, y, z) = (-1, 1, 3) + \lambda(2, 1, -3)$ .

Ahora bien, de esta ecuación, se puede obtener lo siguiente:

$$(x, y, z) = (-1, 1, 3) + (2\lambda, \lambda, -3\lambda)$$

$$(x, y, z) = (-1 + 2\lambda, 1 + \lambda, 3 - 3\lambda)$$

luego,  $x = -1 + 2\lambda$   
 $y = 1 + \lambda$   
 $z = 3 - 3\lambda$

de donde,  $\frac{x+1}{2} = \lambda$   
 $y - 1 = \lambda$   
 $\frac{3-z}{3} = \lambda$

Por lo tanto, se tiene que  $\frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{3-z}{3}$ , ecuación que se encuentra en la opción A).

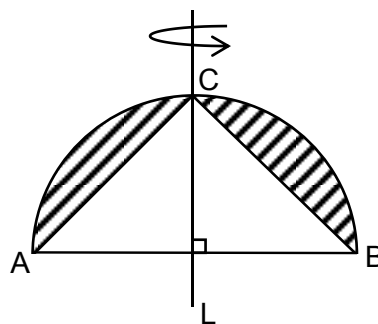
En relación a los distractores, los postulantes se distribuyeron en forma homogénea entre todos ellos.

#### PREGUNTA 54

En la figura 12, se tiene una semicircunferencia de radio 2 cm y diámetro  $\overline{AB}$ , donde el triángulo isósceles ABC está inscrito en ella. Si se hace girar la región achurada, en forma indefinida, en torno a la recta L, se genera un cuerpo cuyo volumen, en centímetros cúbicos, es

- A)  $2\pi - 4$
- B)  $\frac{8}{3}\pi$
- C)  $2\pi - 4\sqrt{2}$
- D)  $8\pi$
- E)  $\frac{1}{3}\pi$

fig. 12



#### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Cuarto Medio

**Objetivo Fundamental:** Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio.

**Contenido:** Volúmenes de cuerpos generados por la rotación de figuras planas.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** B

## COMENTARIO

En esta pregunta el postulante debe determinar el volumen del cuerpo que se genera al hacer girar indefinidamente el semicírculo en torno a la recta L y restarle el volumen del cuerpo que se genera al hacer girar indefinidamente, también en torno a la recta L, el triángulo isósceles ABC.

Ahora bien, si se gira indefinidamente en torno a la recta L el semicírculo y el triángulo isósceles ABC inscrito en ella, se formará una semiesfera y un cono, respectivamente.

Por otra parte, el postulante debe recordar que el volumen de una esfera es  $\frac{4}{3}\pi r^3$ , donde r es el radio de la esfera y el volumen de un cono es  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ , donde r es el radio de la circunferencia de la base y h la altura del cono.

Ahora, el volumen de la semiesfera es  $\frac{2}{3}\pi r^3$  y como en el enunciado se indica que el radio de la semicircunferencia es 2 cm, se tiene que el volumen de la semiesfera es  $\frac{2}{3}\pi(2)^3 = \frac{16}{3}\pi \text{ cm}^3$ .

Respecto al triángulo ABC se tiene que éste es isósceles rectángulo, ya que  $\sphericalangle ACB = 90^\circ$  porque subtende el arco AB, donde  $\overline{AB}$  es diámetro, luego si se asigna por O al punto medio del segmento AB se tiene que  $AO = OB = OC = r$ , donde r es el radio de la semicircunferencia. Como  $r = 2$  cm y es igual a la altura del cono, se tiene que el volumen del cono es  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(2)^2 \cdot 2 = \frac{8}{3}\pi \text{ cm}^3$ .

Por último, la diferencia entre los volúmenes de los cuerpos generados es  $\frac{16}{3}\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi \text{ cm}^3$ , medida que se encuentra en la opción B).

Por otra parte, el distractor más marcado fue C) con un 3% de las preferencias, posiblemente quienes lo escogieron determinaron el volumen pedido como la diferencia entre el perímetro de la semicircunferencia y la suma de las medidas de los lados iguales del triángulo ABC.

## PREGUNTA 55

Si la tabulación del peso de 50 niños recién nacidos se muestra en la tabla adjunta, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) La mediana se encuentra en el segundo intervalo.
- II) Un 20% de los recién nacidos pesó 4 o más kilogramos.
- III) El intervalo modal es 3,0 – 3,4.

- A) Solo III
- B) Solo I y II
- C) Solo I y III
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

Peso (kg)	Nº de niños
2,5 – 2,9	5
3,0 – 3,4	23
3,5 – 3,9	12
4,0 – 4,4	10

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Datos

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.

**Contenido:** Medidas de tendencia central.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** E

### COMENTARIO

Para resolver este ítem el postulante debe ser capaz de comprender la información presentada en la tabla adjunta y determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III).

Una forma de visualizar los datos es agregar a la tabla una columna con la frecuencia relativa acumulada porcentual ( $F_r\%$ ), por ejemplo, para el segundo intervalo será  $\frac{5+23}{50} \cdot 100 = 56\%$ , como se muestra a continuación:

Peso (kg)	Nº de niños	$F_r\%$
2,5 – 2,9	5	10%
3,0 – 3,4	23	56%
3,5 – 3,9	12	80%
4,0 – 4,4	10	100%

Para determinar la veracidad de I), el postulante debe recordar que la mediana divide a un conjunto de valores en dos mitades, donde una mitad de los valores será igual o menor que la mediana y la otra mitad será igual o mayor que ella. Ahora, de la tabla se puede observar que hasta el 2,9 hay acumulado el 10% de los datos y que hasta el 3,4 hay acumulado el 56% de los datos, por lo que en el segundo intervalo se encuentra la mediana, luego la afirmación en I) es verdadera.

En II) se afirma que el 20% de los recién nacidos pesó 4 o más kilogramos, esta afirmación es verdadera, pues según la tabla, en el intervalo 4,0 – 4,4 se encuentran 10 niños de un total de 50, lo que equivale a un 20%.

En III) se afirma que el intervalo modal es 3,0 – 3,4, esta afirmación también es verdadera, porque el intervalo modal corresponde al intervalo que tiene la mayor frecuencia, en este caso 23 niños.

De lo anterior, la clave es E) y el distractor más marcado fue D) con un 20% de las preferencias. Es posible que quienes lo escogieron, hayan asumido en I) que la mediana del peso correspondía a la semisuma del peso menor con el peso mayor, es decir,  $\frac{2,5 + 4,4}{2} = 3,45$  valor que se encuentra en el tercer intervalo.



## PREGUNTA 56

Se tiene una población compuesta por las fichas 1, 3, 5, 5 y 7. ¿Cuál es la cantidad de todas las posibles muestras (sin reposición y sin orden) de tamaño 2 que pueden extraerse desde esta población?

- A) 10
- B) 20
- C) 25
- D) 6
- E) 12

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Datos

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población.

**Contenido:** Muestras de un tamaño dado, que se pueden extraer desde una población de tamaño finito, sin reemplazo.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** A

### COMENTARIO

Para resolver el ítem el postulante debe tener presente que el número total de muestras posibles, sin reposición y sin orden, de tamaño  $n$  de una población compuesta por  $m$  elementos, con  $m > n$ , corresponde al número combinatorio  $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$ .

Luego, la totalidad de las posibles muestras, sin orden y sin reposición, de tamaño 2 que se pueden formar con los 5 elementos de la población dada en el enunciado equivale a  $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ . Cantidad que se encuentra en la opción A).

El distractor de mayor preferencia fue B), con un 22% de adhesión, es posible que los postulantes que lo escogieron consideraran que para la primera extracción hay 5 fichas y que para la segunda extracción hay 4 fichas, luego el número total de extracciones es  $5 \cdot 4 = 20$ , poniendo como condición el orden en que se extraen.

**PREGUNTA 57**

¿Cuál de las tablas de frecuencia acumulada presentadas en las opciones corresponde a la gráfica de las frecuencias relativas acumuladas de la figura 13, si la muestra es de 100 personas?

A)

Intervalos	Frecuencia acumulada
[0; 0,2[	5
[0,2; 0,7[	10
[0,7; 0,8[	15
[0,8; 1]	20

B)

Intervalos	Frecuencia acumulada
[0; 0,2[	5
[0,2; 0,7[	15
[0,7; 0,8[	35
[0,8; 1]	55

C)

Intervalos	Frecuencia acumulada
[0; 5[	20
[5; 10[	50
[10; 15[	10
[15; 20]	20

D)

Intervalos	Frecuencia acumulada
[0; 5[	20
[5; 10[	70
[10; 15[	80
[15; 20]	100

E)

Intervalos	Frecuencia acumulada
[0; 5[	0,2
[5; 10[	0,7
[10; 15[	0,8
[15; 20]	1

Frecuencias relativas acumuladas

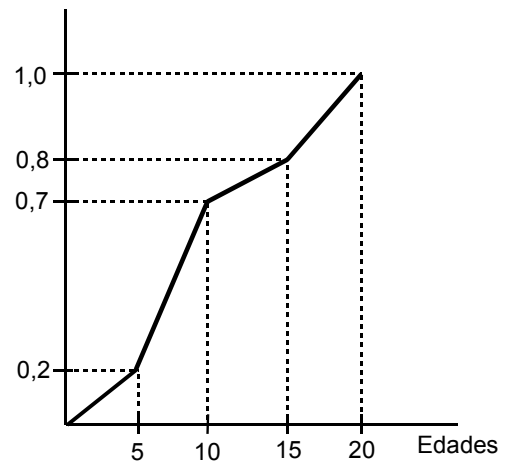


fig. 13

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Datos

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.

**Contenido:** Polígonos de frecuencia acumulada.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** D

### COMENTARIO

Este ítem apunta al contenido de interpretación de datos extraídos de diversas fuentes, en este caso desde un polígono de frecuencias relativa acumulada. Para dar solución a esta pregunta el postulante debe ser capaz de extraer la información presentada en el gráfico y relacionarla con una tabla de frecuencia acumulada.

De esta manera del gráfico se puede obtener que en el intervalo de edades  $[0; 5[$  la frecuencia relativa acumulada es 0,2, en  $[5; 10[$  la frecuencia relativa acumulada es 0,7, en  $[10; 15[$  la frecuencia relativa acumulada es 0,8 y en  $[15; 20]$  la frecuencia relativa acumulada es 1.

Esta información se puede organizar en la siguiente tabla:

Intervalos	Frecuencia relativa acumulada
$[0; 5[$	0,2
$[5; 10[$	0,7
$[10; 15[$	0,8
$[15; 20]$	1

Ahora bien, como la frecuencia relativa acumulada ( $F_i$ ) corresponde al cociente entre la frecuencia acumulada ( $f_i$ ) y el total de elementos de la muestra ( $n$ ), se tiene que  $F_i = \frac{f_i}{n}$ , de donde  $f_i = F_i \cdot n$ , es decir, la frecuencia acumulada corresponde a la multiplicación de la frecuencia relativa acumulada del intervalo por el total de personas de la muestra, como se muestra a continuación:

Intervalos	Frecuencia relativa acumulada	Frecuencia acumulada
$[0; 5[$	0,2	$0,2 \cdot 100 = 20$
$[5; 10[$	0,7	$0,7 \cdot 100 = 70$
$[10; 15[$	0,8	$0,8 \cdot 100 = 80$
$[15; 20]$	1	$1 \cdot 100 = 100$

Luego, la tabla de frecuencia acumulada pedida en el enunciado es la siguiente:

Intervalos	Frecuencia acumulada
$[0; 5[$	20
$[5; 10[$	70
$[10; 15[$	80
$[15; 20]$	100

Esta tabla se encuentra en la opción D). El distractor de mayor frecuencia fue E), con un 23% de las preferencias, posiblemente quienes lo escogieron entendieron, que lo que se pedía en el enunciado era la tabla de frecuencias relativas acumuladas.

### PREGUNTA 58

De acuerdo a los 100 datos de la tabla adjunta, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) El primer cuartil se ubica en el intervalo  $[45, 50[$ .
- II) El intervalo donde se ubica el percentil 50 coincide con el intervalo modal.
- III) La cantidad de datos que se encuentran en el cuarto intervalo corresponden a un 10% del total de los datos.

- A) Solo III
- B) Solo I y II
- C) Solo I y III
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

Intervalo	Frecuencia
$[40, 45[$	17
$[45, 50[$	15
$[50, 55[$	21
$[55, 60[$	10
$[60, 65[$	18
$[65, 70[$	19

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Datos

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.

**Contenido:** Medidas de tendencia central y medidas de posición.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** E

### COMENTARIO

Para resolver el ítem el postulante debe recordar que el primer cuartil representa al valor que deja, aproximadamente, al 25% de los datos por debajo de éste y, aproximadamente, el 75% sobre él y que el percentil 50 corresponde a la mediana.

Al igual que en la pregunta 55 se agregará la frecuencia relativa acumulada porcentual ( $F_r\%$ ) a la tabla adjunta para analizar las afirmaciones, como se muestra a continuación:

Intervalo	Frecuencia	$F_r\%$
[40, 45[	17	17%
[45, 50[	15	32%
[50, 55[	21	53%
[55, 60[	10	63%
[60, 65[	18	81%
[65, 70[	19	100%

En la tabla se puede observar que hasta el 45 se acumula el 17% de los datos y hasta el 50 se acumula el 32% de los datos, por lo que en el segundo intervalo se encuentra el primer cuartil, luego la afirmación en I) es verdadera.

En II) se indica que el intervalo donde se ubica el percentil 50 coincide con el intervalo modal, esto es verdadero, ya que el percentil 50 para datos agrupados corresponde a la mediana y en la tercera columna de la tabla, se observa que hasta el 50 se acumula el 32% de los datos y hasta el 55 se acumula el 53% de los datos, luego la mediana se encuentra en el intervalo [50, 55[ y además, este intervalo es el que tiene la mayor frecuencia, correspondiendo al intervalo modal.

Por último, en III) se señala que la cantidad de datos que se encuentran en el cuarto intervalo corresponden a un 10% del total de los datos, esta afirmación también es verdadera, pues si se observa en la tabla el cuarto intervalo, éste corresponde al intervalo [55, 60[ cuya frecuencia es 10, que equivale a la décima parte de los 100 datos de la tabla, es decir, a un 10%.

De lo anterior, la opción correcta es E) y el distractor más marcado fue D) con un 23% de las preferencias, es probable que los postulantes que lo marcaron pensaron que el primer cuartil corresponde al 25% de los datos, los que estarían concentrados en el intervalo [40, 50[.

## PREGUNTA 59

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)

- I) Si todos los datos numéricos de una población son iguales, entonces la varianza de esta población es 0.
- II) Si dos poblaciones de datos numéricos tienen igual promedio, entonces sus varianzas son iguales.
- III) Si todos los datos numéricos de una población difieren en una unidad con respecto a su promedio, entonces la varianza de esta población es 1.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Datos

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.

**Contenido:** Varianza de un conjunto de datos.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** D

### COMENTARIO

Para resolver este ítem el postulante debe analizar las afirmaciones presentadas en I), en II) y en III) en base a las características de los datos presentadas en estas afirmaciones y determinar la veracidad de cada una de ellas.

Ahora bien, la varianza para  $n$  valores  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es  $\sigma^2 = \frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2}{n}$ , donde  $\mu$  corresponde al promedio de los  $n$  valores.

Para analizar la afirmación en I) se puede considerar, por ejemplo, el conjunto  $\{p, p, p\}$  como población, donde todos sus elementos son iguales, siendo el promedio igual a  $p$ . Ahora si se aplica la fórmula de la varianza, se tiene que  $\sigma^2 = \frac{(p - p)^2 + (p - p)^2 + (p - p)^2}{3} = 0$ .

En general, si el conjunto está compuesto por  $n$  elementos iguales a  $p$  se tiene que su promedio es  $p$  y por lo tanto, la diferencia entre cada elemento y el promedio de la población es 0, siendo la varianza igual a 0, luego la afirmación en I) es siempre verdadera.

En II) si se consideran, por ejemplo, los conjuntos  $A = \{0, 0\}$  y  $B = \{-1, 0, 1\}$  como dos poblaciones, se tiene que en ambos casos el promedio es 0, pero la varianza de A es  $\sigma^2 = \frac{(0 - 0)^2 + (0 - 0)^2}{2} = 0$  y la varianza de B es  $\sigma^2 = \frac{(-1 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (1 - 0)^2}{3} = \frac{2}{3}$ , luego la afirmación en II) no siempre es verdadera.

En III) si se considera  $\mu$  como el promedio para los  $n$  valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , de una población se tiene que la diferencia entre  $\mu$  y cualquier valor de la población es 1, es decir,  $(x_i - \mu)^2 = 1$ , con  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Así,  $\sigma^2 = \frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2}{n} = \frac{1 + 1 + \dots + 1}{n} = \frac{n}{n} = 1$ , por lo que la afirmación en III) es siempre verdadera.

Del análisis anterior, la opción correcta es D) y el distractor de mayor frecuencia fue C) con un 20% de las preferencias, es posible que quienes lo escogieron hayan cometido una serie de errores en el cálculo de la varianza que los llevaron a creer que la afirmación en II) es verdadera y la afirmación en III) es falsa.

## PREGUNTA 60

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s) con respecto a los datos presentados en la tabla adjunta?

- I) El intervalo modal de las estaturas de los hombres y el de las estaturas de las mujeres es el mismo.
- II) La mediana de las estaturas de las mujeres está en el intervalo 1,56 – 1,60.
- III) El promedio y la mediana de las estaturas de los hombres se encuentran en el mismo intervalo.

- A) Solo I
- B) Solo I y II
- C) Solo I y III
- D) Solo II y III
- E) I, II y III

	Estatura (en metros)			
Género	1,51 – 1,55	1,56 – 1,60	1,61 – 1,65	1,66 – 1,70
Hombre	1	2	10	7
Mujer	4	7	8	1

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Datos

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.

**Contenido:** Comparación de dos muestras de datos haciendo uso de indicadores de tendencia central.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** E

### COMENTARIO

Para responder este ítem el postulante debe comparar dos muestras, en este caso comparar las estaturas del grupo de los hombres con las estaturas del grupo de las mujeres.

En I) se afirma que el intervalo modal de las estaturas de los hombres y de las estaturas de las mujeres es el mismo, lo cual es verdadero, ya que si se observa en la tabla, para los hombres el intervalo que tiene mayor frecuencia es 1,61 – 1,65 y para las mujeres el intervalo que tiene mayor frecuencia también es 1,61 – 1,65.

En II) se señala que la mediana de las estaturas de las mujeres está en el intervalo 1,56 – 1,60. Una forma de determinar la veracidad de esta afirmación es crear una tabla con la información de las estaturas de las mujeres y agregar la columna de frecuencia relativa acumulada porcentual ( $F_r\%$ ), como se muestra a continuación:

Intervalos	Mujer	
	Frecuencia	$F_r\%$
1,51 – 1,55	4	20%
1,56 – 1,60	7	55%
1,61 – 1,65	8	95%
1,65 – 1,70	1	100%

Luego, en esta tabla se puede observar que hasta el 1,55 hay acumulado el 20% de los datos y hasta el 1,60 hay acumulado el 55% de los datos, de manera que en el intervalo 1,56 – 1,60 se encuentra la mediana, por lo que la afirmación en II) es verdadera.

En III) se indica que el promedio y la mediana de las estaturas de los hombres se encuentran en el mismo intervalo, y al igual que en la afirmación II) una manera de determinar la veracidad de esta afirmación es crear una tabla con la información de las estaturas de los hombres, agregando la columna de marca de clase y la columna de frecuencia relativa acumulada porcentual ( $F_r\%$ ), como se muestra a continuación:

Intervalos	Hombre		
	Marca de clase	Frecuencia	$F_r\%$
1,51 – 1,55	1,53	1	5%
1,56 – 1,60	1,58	2	15%
1,61 – 1,65	1,63	10	65%
1,65 – 1,70	1,68	7	100%

Ahora, el promedio de la estatura de los hombres, según la tabla, se calcula de la siguiente manera:

$$\frac{1,53 \cdot 1 + 1,58 \cdot 2 + 1,63 \cdot 10 + 1,68 \cdot 7}{20} = 1,6375$$

Este valor pertenece al intervalo 1,61 – 1,65.

Por otra parte, en la tabla se puede observar que hasta el 1,60 hay acumulado el 15% de los datos y hasta el 1,65 hay acumulado el 65% de los datos, por lo que en el intervalo 1,61 – 1,65 está la mediana, luego la afirmación en III), también es verdadera.

De lo anterior, la clave es E). El distractor que obtuvo mayor adhesión fue C) con un 14% de las preferencias, posiblemente los postulantes que lo escogieron consideraron la mediana de las estaturas de las mujeres como la semisuma de la estatura menor con la estatura mayor, es decir,  $\frac{1,51 + 1,70}{2} = 1,605$ , valor que no se encuentra en el intervalo 1,56 – 1,60, siendo II) falsa.



## PREGUNTA 61

Todos los elementos de una población son: P, Q, R y S, los cuales corresponden a números enteros positivos. En las tablas adjuntas se muestran los resultados de dos experimentos realizados con esta población. En el primero se sacó tres muestras distintas de tamaño 2 de la población y se registró la media de cada una de ellas. En el segundo se sacó cuatro muestras distintas de tamaño 2 de la misma población anterior y se registró la media de cada una de ellas. ¿Cuál es el valor de la media aritmética de esa población?

- A) 17
- B) 11,3
- C) 9,575
- D) 9,5
- E) 14,25

Experimento 1	
Muestra	Media de la muestra
{R, S}	12
{P, S}	14
{Q, S}	11

Experimento 2	
Muestra	Media de la muestra
{P, Q}	7
{P, R}	8
{Q, R}	5
{Q, S}	11

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Datos

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender que la media muestral de pruebas independientes de un experimento aleatorio se aproxima a la media de la población a medida que el número de pruebas crece.

**Contenido:** Media de una población finita a partir de las muestras extraídas.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** D

### COMENTARIO

Este ítem tiene que ver con la determinación de la media aritmética o promedio de una población a partir de las muestras extraídas, y para responder la pregunta el postulante debe determinar el promedio de una población finita, promediando todos los promedios de todas las muestras del mismo tamaño que se pueden extraer de dicha población.

En efecto, se puede observar que a partir de los datos de las tablas del experimento 1 y del experimento 2, se pueden obtener todos los promedios de todas las muestras de tamaño 2 que se pueden extraer desde la población compuesta por los elementos P, Q, R y S, que son {R, S}, {P, S}, {Q, S}, {P, Q}, {P, R} y {Q, R}, luego el promedio de los datos de esta población está dado por el promedio del promedio de todas estas muestras, es decir,  $\frac{12 + 14 + 11 + 7 + 8 + 5}{6} = 9,5$ , por lo que la clave es D).

Uno de los distractores más marcados fue C) con un 18% de las preferencias, es probable que los postulantes que marcaron este distractor, calcularan la media aritmética de la población considerando todas las medias de todas las muestras de tamaño dos que muestran las tablas, sin considerar que la muestra {Q, S} se encuentra en ambos experimentos.

## PREGUNTA 62

La cantidad de televisores por familia en una ciudad, se modela por medio de una distribución normal con media  $\mu$  y varianza 0,25. Se toma una muestra aleatoria de 100 familias de esta ciudad, obteniéndose una media de 2,75 televisores. Para los resultados de esta muestra, ¿cuál de los siguientes intervalos es el intervalo de confianza de nivel 0,95 para  $\mu$ ?

- A)  $\left[ 2,75 - 1,96 \cdot \frac{1}{40}; 2,75 + 1,96 \cdot \frac{1}{40} \right]$
- B)  $\left[ 2,75 - 0,95 \cdot \frac{1}{200}; 2,75 + 0,95 \cdot \frac{1}{200} \right]$
- C)  $\left[ -1,96 \cdot \frac{1}{400}; 1,96 \cdot \frac{1}{400} \right]$
- D)  $\left[ -0,95 \cdot \frac{1}{20}; 0,95 \cdot \frac{1}{20} \right]$
- E)  $\left[ 2,75 - 1,96 \cdot \frac{1}{20}; 2,75 + 1,96 \cdot \frac{1}{20} \right]$

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Datos

**Nivel:** Cuarto Medio

**Objetivo Fundamental:** Argumentar acerca de la confiabilidad de la estimación de la media de una población con distribución normal, a partir de datos muestrales.

**Contenido:** Intervalos de confianza.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** E

### COMENTARIO

Para resolver este ítem el postulante debe saber que el intervalo de confianza de nivel  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ , con  $\alpha \in ]0, 1[$ , para la media  $\mu$  de una población que se modela con una distribución normal de varianza conocida  $\sigma^2$ , a partir de una muestra  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de tamaño  $n$  es

$$\left[ \bar{x} - z_{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

De los datos del enunciado se tiene que  $n = 100$ ,  $\bar{x} = 2,75$  televisores y  $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$  televisores y  $(1 - \alpha) = 0,95$ , de donde se obtiene que  $\alpha = 0,05$  y  $\frac{\alpha}{2} = 0,025$ . Así,

$z_{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} = z_{1 - 0,025} = z_{0,975}$ , el cual debe cumplir que  $P(Z \leq z_{0,975}) = 0,975$ , con  $Z \sim N(0, 1)$ . Ahora,

de la tabla que está en la contraportada del modelo se determina que  $z_{0,975} = 1,96$ .

Finalmente, al reemplazar los valores anteriores en el intervalo de confianza mencionado en el primer párrafo, se obtiene  $\left[ 2,75 - 1,96 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{100}}; 2,75 + 1,96 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{100}} \right]$ , lo que es equivalente a  $\left[ 2,75 - 1,96 \cdot \frac{1}{20}; 2,75 + 1,96 \cdot \frac{1}{20} \right]$ , intervalo que se encuentra en E).

El distractor con mayor adhesión es B), con un 25% de las preferencias, es probable que los postulantes que lo seleccionaron, no calcularon la raíz cuadrada del tamaño de la muestra, es decir, consideraron como intervalo de confianza  $\left[ \bar{x} - z \cdot \frac{\sigma}{n}; \bar{x} + z \cdot \frac{\sigma}{n} \right]$ .

### PREGUNTA 63

Sea  $X$  una variable aleatoria continua, tal que  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , donde se sabe que  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,6826$  y  $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,9545$ . ¿Cuál es el valor de  $P(\mu + \sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$ ?

- A) 0,13595
- B) 0,2719
- C) 0,86405
- D) 0,81855
- E) Ninguno de los anteriores.

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Azar

**Nivel:** Cuarto Medio

**Objetivo Fundamental:** Evaluar críticamente información estadística extraída desde medios de comunicación, tales como periódicos, artículos de revistas o desde Internet.

**Contenido:** Distribución normal.

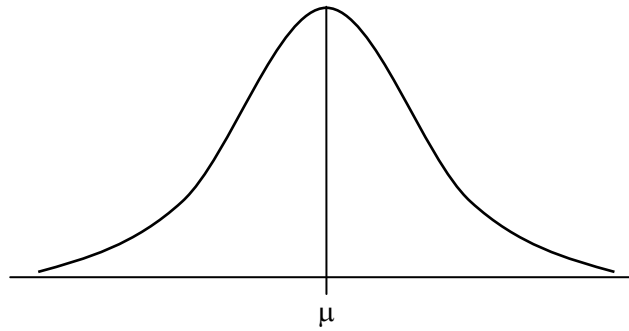
**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** A

### COMENTARIO

Este ítem apunta al cálculo de la probabilidad de una variable aleatoria continua  $X$ , que tiene distribución normal de parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$ , donde  $\mu$  es la media de la variable aleatoria  $X$  y  $\sigma^2$  corresponde a su varianza.

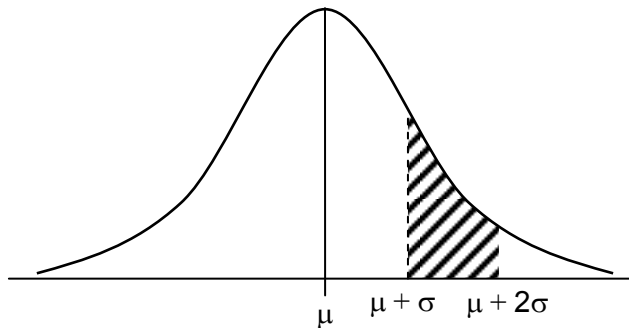
Para responder la pregunta el postulante debe calcular la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  se encuentre en el intervalo  $[\mu + \sigma, \mu + 2\sigma]$ , para esto se debe considerar el gráfico de la función de densidad normal de la variable aleatoria  $X$ , de parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$  que se muestra en la siguiente figura:



De la información del enunciado se tiene que  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,6826$  y que  $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,9545$ , esto representado en el gráfico de la función densidad normal anterior es:

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,6826$	$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,9545$
<p>Como la gráfica es simétrica respecto a <math>\mu</math>, la probabilidad que representa la zona achurada entre <math>\mu</math> y <math>(\mu + \sigma)</math> es <math>\frac{0,6826}{2} = 0,3413</math>, lo que es equivalente a <math>P(\mu \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,3413</math>.</p>	<p>De la misma forma, la probabilidad que representa la zona achurada entre <math>\mu</math> y <math>(\mu + 2\sigma)</math> es <math>\frac{0,9545}{2} = 0,47725</math>, lo que es equivalente a <math>P(\mu \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,47725</math>.</p>

Luego, el valor de  $P(\mu + \sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$ , corresponde en la zona achurada de la siguiente figura:



Donde la probabilidad pedida se puede calcular como:

$$\begin{aligned}P(\mu + \sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &= P(\mu \leq X \leq \mu + 2\sigma) - P(\mu \leq X \leq \mu + \sigma) \\ &= 0,47725 - 0,3413 \\ &= 0,13595\end{aligned}$$

valor que se encuentra en A). Los postulantes que erraron el ítem se distribuyeron de manera homogénea entre los cuatro distractores.

## PREGUNTA 64

Un taller fabrica fichas plásticas y le hacen un pedido de fichas impresas con todos los números de tres dígitos que se pueden formar con el 2, el 3, el 4, el 5 y el 6. ¿Cuál es el doble de la cantidad del pedido?

- A) 20
- B) 30
- C) 60
- D) 125
- E) 250

## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Azar

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia y aplicarlo al cálculo de probabilidades en diversas situaciones.

**Contenido:** Técnicas combinatorias.

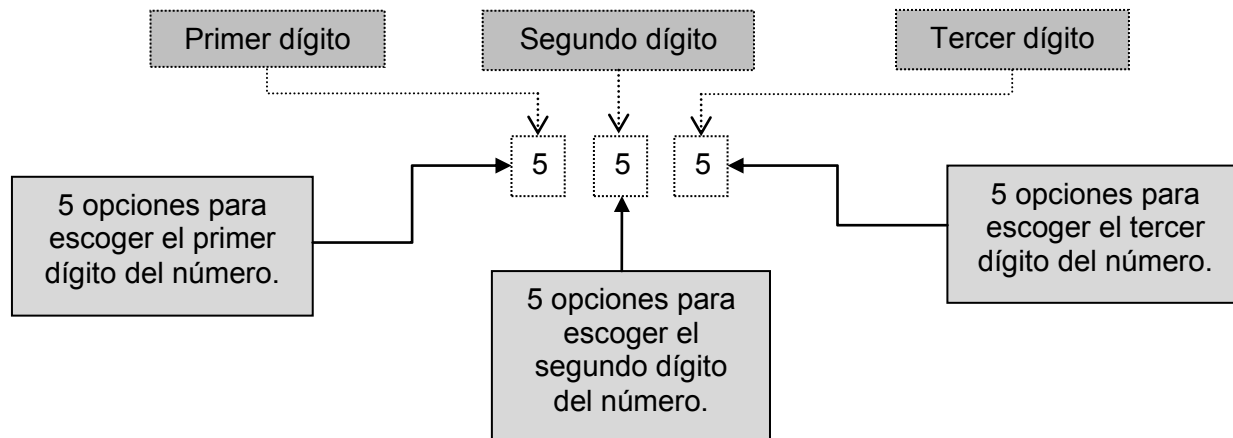
**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** E

## COMENTARIO

El ítem evalúa las técnicas combinatorias para determinar todos los números de tres dígitos que se pueden formar de un conjunto de cinco dígitos.

Para calcular la cantidad de números de tres dígitos que se pueden formar con el 2, el 3, el 4, el 5 y el 6, se debe considerar que el orden sí importa, que se pueden repetir los dígitos y que todos los números con los que se puede formar el número de las fichas son distintos, por lo tanto, cada uno de los tres dígitos del número de las fichas, se puede escoger entre cinco opciones, tal como se muestra en el siguiente esquema:



Luego, aplicando el principio multiplicativo se tiene que la cantidad de fichas del pedido se puede calcular como  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ , por lo que el doble de esa cantidad es 250, siendo la clave E).

El distractor con mayor adhesión corresponde a la opción C) con el 7% de las preferencias, probablemente los postulantes que seleccionaron esta opción consideraron que los dígitos del número de las fichas no se podían repetir, por lo tanto, al aplicar el principio multiplicativo obtienen  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  y además, no consideran el doble del pedido.

## PREGUNTA 65

Un estuche contiene solo 8 lápices del mismo tipo, de los cuales 3 son azules y 5 son rojos. Si se extraen simultáneamente, al azar, 4 lápices del estuche y se define la variable aleatoria  $X$  como el número de lápices azules extraídos, ¿cuáles son todos los posibles valores de  $X$ ?

- A) 1, 2 y 3
- B) 0, 1, 2 y 3
- C) 1, 2, 3 y 4
- D) 0, 1, 2, 3 y 4
- E) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Azar

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

**Contenido:** Variable aleatoria discreta.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** B

## COMENTARIO

En esta pregunta los postulantes deben determinar todos los posibles valores de una variable aleatoria discreta definida para un experimento aleatorio, dicho experimento consiste en

extraer simultáneamente 4 lápices desde un estuche que contiene solo 3 lápices azules y 5 lápices rojos.

La variable aleatoria X definida para el experimento anterior corresponde al número de lápices azules extraídos, por lo tanto, si de los 4 lápices extraídos:

- 4 son de color rojo, entonces X toma el valor 0, pues no existen lápices de color azul.
- 3 son de color rojo y 1 de color azul, entonces X toma el valor 1.
- 2 son de color rojo y 2 de color azul, entonces X toma el valor 2.
- 1 es de color rojo y 3 de color azul, entonces X toma el valor 3.

Por lo tanto, todos los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria X son el 0, el 1, el 2 y el 3, luego la clave es B).

El distractor con mayor frecuencia fue A) con un 14% de adhesión, posiblemente los postulantes que seleccionaron esta opción, no consideraron aquella extracción compuesta solamente por lápices de color rojo.

## PREGUNTA 66

Se lanza una moneda y dos dados comunes, uno a continuación del otro. ¿Cuál es la probabilidad de que en la moneda salga cara y de que el número del primer dado sea menor que el número del segundo?

- A)  $\frac{1}{4}$
- B)  $\frac{33}{36}$
- C)  $\frac{21}{72}$
- D)  $\frac{15}{72}$
- E)  $\frac{1}{24}$

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Azar

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Aplicar propiedades de la suma y producto de probabilidades, en diversos contextos, a partir de la resolución de problemas que involucren el cálculo de probabilidades.

**Contenido:** Producto de probabilidades.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** D

## COMENTARIO

Este ítem apunta a la resolución de problemas a través del cálculo de probabilidades en el cual se aplican el producto de probabilidades. Para el experimento dado en el enunciado se pueden definir los eventos A, B y C, tal que:

- A: En la moneda salga una cara.
- B: El número del primer dado sea menor que el número del segundo dado.
- C: En la moneda salga cara y el número del primer dado sea menor que el número del segundo dado.

De esta forma,  $P(C) = P(A) \cdot P(B)$ , ya que los eventos A y B son independientes, luego basta calcular las probabilidades de los eventos A y B para obtener la probabilidad de C.

Para obtener  $P(A)$  se debe considerar que la cantidad de casos posibles son 2 (cara o sello) y la cantidad de casos favorables es 1 (cara), luego  $P(A) = \frac{1}{2}$ , por otro lado, para calcular  $P(B)$  se puede construir la tabla de doble entrada que se muestra a continuación, donde se encuentran todos los casos posibles al lanzar dos dados.

		Resultados del segundo dado lanzado					
		1	2	3	4	5	6
Resultados del primer dado lanzado	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

En la tabla anterior se puede observar que son 36 los casos posibles, de los cuales 15 cumplen la condición del evento B (los pares ordenados que se encuentran en las celdas grises), luego  $P(B) = \frac{15}{36}$ .

Finalmente, se tiene que  $P(C) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{36} = \frac{15}{72}$ , valor que se encuentra en la opción D).

Uno de los distractores más marcado fue A), con un 18% de las preferencias. Es probable que los postulantes que lo seleccionaron consideraran que todos los casos posibles al lanzar dos dados eran 30, al no tomar en cuenta los casos en que en los dos dados sale el mismo número,

$$\text{así } P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{30} = \frac{1}{4}.$$



## PREGUNTA 67

En un salón hay 1.000 personas y cada una de ellas lanza 3 monedas. La Ley de los Grandes Números permite afirmar que

- A) en cualquier grupo de 8 personas del salón, una de ellas obtuvo tres caras.
- B) en cualquier grupo de 16 personas del salón, cuatro de ellas obtuvieron tres caras.
- C) aproximadamente, el 12,5% de las personas del salón obtuvo tres caras.
- D) aproximadamente, el 25% de las personas del salón obtuvo tres caras.
- E) aproximadamente, la mitad de las personas del salón obtuvo tres caras.

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Azar

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender que la media muestral de pruebas independientes de un experimento aleatorio se aproxima a la media de la población a medida que el número de pruebas crece.

**Contenido:** Ley de los Grandes Números.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** C

### COMENTARIO

Para resolver este ítem el postulante debe analizar las afirmaciones presentadas en las opciones, considerando la Ley de los Grandes Números (L.G.N.), la cual plantea que a medida que aumenta el número de repeticiones de un experimento aleatorio, la frecuencia relativa de un suceso se aproxima cada vez más a su probabilidad teórica.

Como en el salón hay 1.000 personas, es cierto que por la L.G.N. existen personas que obtienen tres caras al lanzar las monedas, pero no se puede asegurar que en cualquier grupo de 8 personas del salón una de ellas obtiene 3 caras, luego A) es falsa.

En B) al igual que en el caso anterior, no se puede asegurar que en cualquier grupo de 16 personas del salón se encuentran cuatro de ellas que obtengan tres caras.

En cambio, en C) se tiene que la probabilidad de que al lanzar tres monedas las tres sean caras es  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125$ , por lo que por la L.G.N, aproximadamente, un 12,5% de las personas del salón obtienen tres caras al lanzar las monedas, luego C) es la clave. Dado lo anterior, las opciones D) y E) son falsas.

El distractor más marcado fue D) con una frecuencia del 11%, es probable que los postulantes que lo marcaron consideraran que, como la cantidad de caras al lanzar tres monedas pueden ser 0, 1, 2 ó 3, la probabilidad de que sea 3 es  $\frac{1}{4} = 0,25$ , por lo que, aproximadamente, el 25% de las personas del salón obtuvo tres caras.

## PREGUNTA 68

Si se lanza un dado común 120 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente 20 veces el número 1?

- A)  $\binom{100}{20} \left(\frac{1}{6}\right)^{20} \left(\frac{5}{6}\right)^{100}$
- B)  $\binom{120}{20} \left(\frac{1}{6}\right)^{20} \left(\frac{5}{6}\right)^{100}$
- C)  $\binom{120}{20} \left(\frac{1}{6}\right)^{20}$
- D)  $\binom{120}{20} \left(\frac{1}{6}\right)^{120}$
- E)  $\left(\frac{1}{6}\right)^{20}$

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Azar

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Aplicar el concepto de modelo probabilístico para describir resultados de experimentos binomiales.

**Contenido:** Modelo binomial.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** B

### COMENTARIO

En este ítem el postulante debe usar el modelo binomial al efectuar N veces un experimento aleatorio con resultados dicotómicos (éxito o fracaso), es decir, el postulante debe conocer que si la probabilidad de tener éxito en un experimento aleatorio dicotómico es p y la probabilidad de tener fracaso, en el mismo experimento, es  $q = 1 - p$ , entonces la probabilidad de obtener exactamente k éxitos, al efectuar de forma independiente N veces dicho experimento aleatorio,

está dado por la expresión  $\binom{N}{k} p^k \cdot q^{N-k}$ .

En este ítem, se puede considerar que al lanzar un dado común se obtienen dos resultados, éxito o fracaso, donde se llamará éxito cuando se obtenga 1 al lanzar el dado y fracaso cuando se obtenga cualquier otro número, luego, la probabilidad de obtener el número 1 es  $p = \frac{1}{6}$  y la

probabilidad de no obtener el número 1 es  $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ , por lo que, la probabilidad de obtener exactamente 20 veces el número 1 en 120 lanzamientos se puede expresar como

$\binom{120}{20} \left(\frac{1}{6}\right)^{20} \left(\frac{5}{6}\right)^{100}$ , por lo tanto la clave es B).

El distractor con mayor frecuencia corresponde a la opción C), con un 26% de las preferencias, los postulantes que lo marcaron consideraron solamente la probabilidad de obtener 20 veces el número 1 al realizar 120 veces el experimento, sin pensar que el resto deben ser obligatoriamente fracasos.

### PREGUNTA 69

La probabilidad de que un feriante venda frutas un día determinado dado que está lloviendo es  $\frac{1}{3}$ . Si la probabilidad de que venda y llueva ese día es  $\frac{1}{5}$ , ¿cuál es la probabilidad de que **NO** llueva ese día?

- A)  $\frac{14}{15}$
- B)  $\frac{1}{15}$
- C)  $\frac{2}{3}$
- D)  $\frac{4}{5}$
- E)  $\frac{2}{5}$

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Azar

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender el concepto de probabilidad condicional y aplicarlo en diversas situaciones que involucren el cálculo de probabilidades.

**Contenido:** Probabilidad condicional.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** E

### COMENTARIO

Para responder la pregunta los postulantes deben determinar la probabilidad condicional entre dos sucesos, aplicando la fórmula  $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ , donde A y B son dos sucesos, P una probabilidad sobre ellos y  $P(B) > 0$ .

Se pueden definir los eventos A: vender fruta un día determinado y B: que llueva ese día, por lo tanto  $P(A/B)$  es la probabilidad de vender fruta un día determinado dado que está lloviendo,  $P(A \cap B)$  es la probabilidad de vender fruta y que llueva ese día y  $P(B)$  es la probabilidad de que llueva ese día, luego, del enunciado se tiene que  $P(A/B) = \frac{1}{3}$  y  $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ , por lo que al aplicar

la fórmula anterior se tiene la igualdad  $\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{5}}{P(B)}$ , donde al despejar  $P(B)$  se obtiene  $P(B) = \frac{3}{5}$ , pero como se pregunta por la probabilidad de que NO llueva ese día, la probabilidad buscada es la probabilidad de B complemento, es decir,  $1 - P(B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ , siendo E) la clave del ítem.

El distractor con mayor frecuencia es B), con un 26% de las preferencias, es probable que los postulantes que lo seleccionaron realizaron la siguiente multiplicación  $P(A \cap B) \cdot P(A/B)$  para obtener  $P(B)$ , la cual tiene como resultado  $\frac{1}{15}$  y además, no determinan la probabilidad de que no llueva.

### PREGUNTA 70

En la tabla adjunta se muestra la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I)  $p = 0,2$
- II) El valor esperado de X es 3.
- III) La desviación estándar de X es 0.

- A) Solo I
- B) Solo III
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) I, II y III

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	p	p	p	p	p

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Azar

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

**Contenido:** Valor esperado y desviación estándar de una variable aleatoria discreta.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** C

### COMENTARIO

El postulante para verificar la veracidad de las afirmaciones dadas en la pregunta debe comprender la definición de función de probabilidad y determinar el valor esperado y la desviación estándar de una variable aleatoria discreta.

En I) se afirma que  $p = 0,2$ , esto es verdadero, pues la suma de todas las probabilidades de los elementos del recorrido de una variable aleatoria es igual a 1, esto es  $p + p + p + p + p = 1$ , de donde  $p = \frac{1}{5} = 0,2$ .

En II), se afirma que el valor esperado de X es 3, esto es verdadero, porque el valor esperado de X corresponde a la suma de los productos de cada elemento del recorrido con la probabilidad asociada a este, en este caso,  $1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,2 = 3$ .

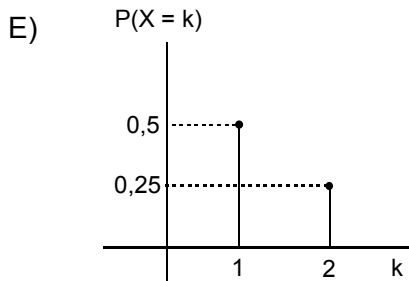
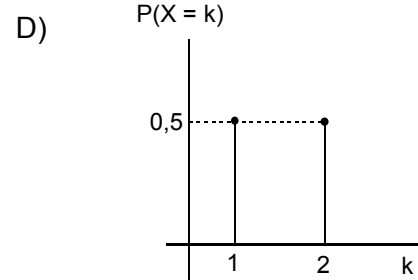
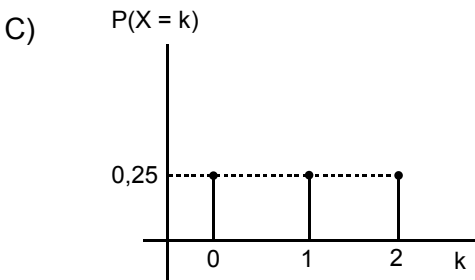
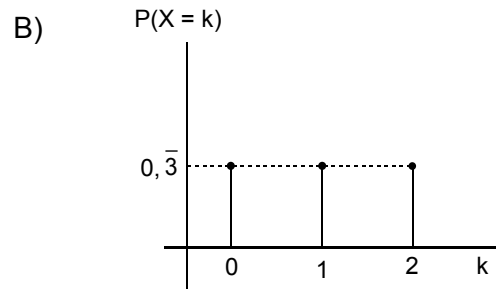
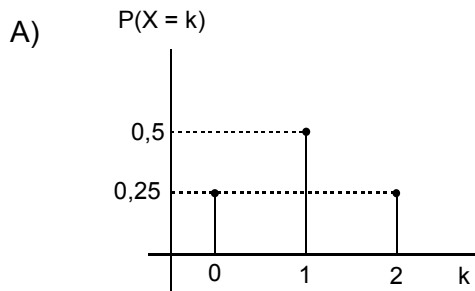
Finalmente, como la desviación estándar de una variable aleatoria corresponde a la raíz cuadrada de la suma de los productos entre, el cuadrado de la diferencia de cada elemento del recorrido de la variable con el valor esperado de ésta por la probabilidad asociada a ese elemento, es decir,  $\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot P(X=x_i)}$ , donde  $x_i$  son los elementos del recorrido de la variable X,  $E(X)$  es el valor esperado de X y  $P(X = x_i)$  es la probabilidad de que la variable X tome el valor  $x_i$ , luego la desviación estándar de X es:

$$\sqrt{(1 - 3)^2 \cdot 0,2 + (2 - 3)^2 \cdot 0,2 + (3 - 3)^2 \cdot 0,2 + (4 - 3)^2 \cdot 0,2 + (5 - 3)^2 \cdot 0,2} = \sqrt{2}$$

Dado que solo las afirmaciones dadas en I) y en II) son verdaderas, la clave es C). El distractor más marcado fue B), con una adhesión del 30%, posiblemente los postulantes que marcaron esta opción aplicaron de forma errónea las fórmulas en I) y en II), además, en III) concluyeron que la desviación estándar es 0, ya que aplicaron la desviación estándar a las probabilidades y no a los elementos del recorrido de la variable X.

### PREGUNTA 71

En el experimento de lanzar una moneda dos veces, se define la variable aleatoria X como el número de sellos obtenidos en los dos lanzamientos. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa la función de probabilidad de la variable aleatoria X?



## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Azar

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

**Contenido:** Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.

**Habilidad Cognitiva:** Comprender

**Clave:** A

### COMENTARIO

Para resolver esta pregunta el postulante debe ser capaz de determinar la gráfica de la función de probabilidad de la variable aleatoria  $X$  definida en el enunciado del ítem, considerando que una función de probabilidad  $f$  se define como  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , tal que

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{si } x \text{ pertenece al recorrido de } X \\ 0, & \text{si } x \text{ no pertenece al recorrido de } X \end{cases}$$

Así, en el experimento de lanzar una moneda dos veces se define  $X$  en el enunciado como el número de sellos obtenidos en los dos lanzamientos, luego el recorrido de esta variable aleatoria es el conjunto  $\{0, 1, 2\}$ , ya que en los dos lanzamientos se pueden obtener 2 sellos, 1 sello o ninguno. Por lo anterior, los gráficos de las opciones D) y E) no pueden representar a la función de probabilidad de  $X$ , pues  $k$  no toma todos los valores del recorrido de  $X$ .

Por otra parte, la probabilidad de que no se obtengan sellos es igual a la probabilidad de que se obtengan 2 sellos, esto es  $\frac{1}{4} = 0,25$  y como la probabilidad de obtener un sello es  $\frac{1}{2} = 0,5$ , en la siguiente tabla se muestra la función de probabilidad de  $X$ :

$k$	$P(X = k)$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

De esta manera, los gráficos que aparecen en las opciones C) y D) no pueden representar a la función de probabilidad de  $X$ , lo que si ocurre con el gráfico que aparece en A), siendo esta opción la clave.

El distractor con mayor frecuencia fue D), con un 27% de adhesión, quizás los que marcaron esta opción pensaron que en dos lanzamientos puede salir 1 ó 2 sellos y que cada uno de estos casos tiene igual probabilidad de ocurrencia.

## PREGUNTA 72

Sea  $f$  la función de probabilidad de la variable aleatoria  $X$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} k(4 - x) , & \text{si } x = 1 \\ kx & , \text{ si } x = 2 \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

El valor de  $k$  es

- A)  $\frac{1}{2}$
- B)  $\frac{1}{5}$
- C)  $\frac{1}{4}$
- D)  $\frac{1}{3}$
- E) ninguno de los anteriores.

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Azar

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

**Contenido:** Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** B

### COMENTARIO

El postulante para determinar el valor de  $k$  solicitado en el enunciado debe saber que la suma de todas las probabilidades correspondientes a cada elemento del recorrido de una variable aleatoria es 1.

Así, de la función de probabilidad definida en el enunciado, se tiene que los elementos del recorrido son 1 y 2, luego  $P(X = 1) = k(4 - 1) = 3k$  y  $P(X = 2) = 2k$ . Ahora, como  $P(X = 1) + P(X = 2) = 1$ , se obtiene que  $3k + 2k = 1$ , de donde  $k = \frac{1}{5}$ , valor que se encuentra en la opción B).

En relación a los distractores, C) fue el más marcado con un 20% de las preferencias, posiblemente los postulantes que marcaron esta opción no reemplazaron la variable  $x$  por el valor que toma en cada caso, escribiendo  $k(4 - x) + kx = 1$ , que es equivalente a  $4k - kx + kx = 1$ , obteniendo que  $4k = 1$ , llegando a que  $k = \frac{1}{4}$ .

### PREGUNTA 73

Se define la variable aleatoria X como la cantidad de minutos de atraso de una persona a su trabajo en un cierto día. En la tabla adjunta se muestra la función de probabilidad de X. Dado que el valor esperado de X es 5 minutos, entonces su desviación estándar es

- A)  $\sqrt{44}$  minutos
- B) 10 minutos
- C) 0 minutos
- D)  $\sqrt{10}$  minutos
- E) 44 minutos

k	0	2	4	8
P(X = k)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Azar

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

**Contenido:** Desviación estándar de una variable aleatoria discreta.

**Habilidad Cognitiva:** Aplicar

**Clave:** D

### COMENTARIO

Para solucionar esta pregunta el postulante debe determinar la desviación estándar de una variable aleatoria. De esta manera, con los datos del enunciado y de la tabla se tiene que la desviación estándar de X es:

$$\sqrt{(0-5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (2-5)^2 \cdot \frac{1}{4} + (4-5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (8-5)^2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{8} + \frac{9}{4} + \frac{1}{8} + \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{80}{8}} = \sqrt{10} \text{ minutos}$$

valor que se encuentra en la opción D). Por su parte, el distractor B) fue el que obtuvo la mayor frecuencia, con una adhesión del 20%, en este caso los postulantes pueden tener un error conceptual, pues 10 es la varianza de X y no la desviación estándar.

### PREGUNTA 74

En una urna hay solo fichas de color rojo, verde y amarillo, todas del mismo tipo. Si se saca una ficha al azar de la urna, se puede determinar la probabilidad de que ésta sea roja, si se sabe que:

- (1) En la urna hay 45 fichas.
- (2) La razón entre la cantidad de fichas verdes y el total de fichas de la urna es 2 : 5.

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional



## FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Azar

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Seleccionar la forma de obtener la probabilidad de un evento, ya sea en forma teórica o experimentalmente, dependiendo de las características del experimento aleatorio.

**Contenido:** Cálculo de probabilidades mediante el modelo de Laplace.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** E

### COMENTARIO

En esta pregunta de suficiencia de datos el postulante debe analizar las condiciones dadas en (1) y en (2), para determinar si con ellas juntas o separadas, se puede determinar, en el experimento de extraer al azar una ficha de una urna que contiene solo fichas de color rojo, verde y amarillo, la probabilidad de que la ficha sea de color rojo.

Así, la probabilidad de que la ficha extraída de la urna sea roja se puede determinar a través del modelo de Laplace, como  $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$ , que en este caso correspondería a

$$\frac{\text{N}^\circ \text{ de fichas rojas}}{\text{N}^\circ \text{ total de fichas}}$$

De la información en (1) se tiene que en la urna hay 45 fichas, pero no se sabe nada de la cantidad de fichas rojas que hay en la urna, por lo que con esta afirmación no se puede determinar la probabilidad pedida.

Por otra parte, con la información en (2) solo se tiene la razón entre la cantidad de fichas verdes y el total de fichas de la urna, con lo que no se puede saber cuántas fichas en total y por color hay en la urna, de manera que con la afirmación planteada en este caso tampoco se puede determinar la probabilidad pedida.

Ahora, con ambas informaciones, (1) y (2), se puede obtener el total de fichas y la cantidad de fichas verdes de la urna, a través de la proporción  $\frac{\text{N}^\circ \text{ de fichas verdes}}{45} = \frac{2}{5}$ , pero con estos datos no se puede determinar la cantidad de fichas rojas y la cantidad de fichas amarillas que hay en la urna, por lo tanto, con ambas informaciones no se puede determinar lo solicitado, necesiándose información adicional para hacerlo, de manera que la clave es E).

En relación a los distractores, la opción C) fue la más seleccionada por los postulantes, con una adhesión del 31%, posiblemente pensaron que la cantidad de fichas rojas era la diferencia entre el total de fichas y la cantidad de fichas verdes, olvidando que en la urna también había fichas amarillas.

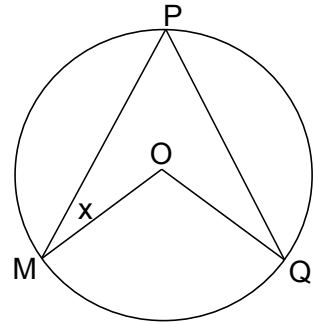
## PREGUNTA 75

En la circunferencia de centro O de la figura 14 los puntos M, Q y P pertenecen a ella. Se puede determinar la medida del ángulo x, si:

- (1) Se conoce la medida del ángulo MOQ.  
(2)  $\overline{MP} \cong \overline{PQ}$

- A) (1) por sí sola  
B) (2) por sí sola  
C) Ambas juntas, (1) y (2)  
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)  
E) Se requiere información adicional

fig. 14



### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Posicional y Métrica

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia, y relacionar las medidas de dichos ángulos.

**Contenido:** Ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** C

### COMENTARIO

Para resolver este ítem el postulante debe ser capaz de relacionar la medida de los ángulos inscritos en una circunferencia con el ángulo del centro que subtiende el mismo arco, es decir, si  $\alpha$  es la medida de un ángulo inscrito en una circunferencia, entonces  $2\alpha$  es la medida de su respectivo ángulo del centro.

La información dada en (1) indica que se conoce la medida del ángulo del centro MOQ, por lo que se puede determinar la medida del ángulo inscrito MPQ que subtiende el mismo arco. Además, si se traza el segmento MQ, se tiene que el  $\triangle MOQ$  es isósceles, pues  $\overline{MO}$  y  $\overline{QO}$  son radios de la circunferencia, luego se puede determinar la medida de los ángulos iguales OMQ y OQM, pero con toda esta información no se puede determinar la medida del ángulo x.

Ahora, con la información de (2) se puede determinar que el  $\triangle MQP$  es isósceles de base  $\overline{MQ}$ , por lo tanto,  $\sphericalangle PMQ = \sphericalangle PQM$ , pero no se conoce la medida de ningún ángulo de la figura, por lo que no se puede determinar la medida del ángulo x.

En cambio, al juntar la información dada en (1) y en (2) se puede determinar la medida de x, pues de (1) se conoce la medida del  $\sphericalangle MPQ$  y como de (2) se tiene que  $\sphericalangle PMQ = \sphericalangle PQM$ , se puede obtener la medida del  $\sphericalangle PMQ$ , además de (1) se tiene que se conoce la medida del  $\sphericalangle OMQ$ , luego  $x = \sphericalangle PMQ - \sphericalangle OMQ$ .

De esta forma, la clave es C) y el distractor con mayor frecuencia fue A), con un 21% de las preferencias. Los postulantes que lo marcaron quizás creyeron que los ángulos PMO y PQO eran congruentes, basándose solamente en la figura.

## PREGUNTA 76

Un terreno rectangular tiene  $48 \text{ m}^2$  de superficie, se puede determinar las medidas de los lados de dicho terreno, si se sabe que:

- (1) Las medidas de los lados son números enteros.
- (2) Un lado mide dos metros más que el otro lado.

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Álgebra

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender que toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces en el conjunto de los números complejos.

**Contenido:** Resolución de problemas asociados a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** B

### COMENTARIO

Esta pregunta apunta a la resolución de un problema geométrico a través del planteamiento de una ecuación de segundo grado con una incógnita, donde además, el postulante debe recordar que el área de un rectángulo se calcula mediante el producto del largo por el ancho.

Así, del enunciado se tiene un terreno rectangular de  $48 \text{ m}^2$  de superficie, es decir, el producto de su largo por su ancho es  $48 \text{ m}^2$ , luego se debe analizar si con esta información y la entregada en (1) y/o en (2) se puede determinar la medida de los lados del terreno.

La información en (1) indica que la medida de los lados son números enteros, luego el producto de dos números enteros debe ser igual a 48, pero existe más de un producto de números enteros que cumplen esta condición, de manera que con (1) no se puede determinar lo solicitado.

Por otra parte, la información en (2) indica que un lado mide dos metros más que el otro lado, luego, si  $x$  es la medida del lado menor, entonces  $(x + 2)$  es la medida del lado mayor, y por lo tanto,  $x(x + 2) = 48$ . De esta ecuación se puede determinar dos valores para  $x$ , es decir,  $x = 6$  o  $x = -8$  y como las medidas del terreno son positivas, se puede determinar las medidas de los lados del terreno con la información dada en (2), lo que implica que la clave es B).

El distractor más seleccionado fue C), con un 23% de las preferencias, es posible que los postulantes que marcaron esta opción no plantearan la ecuación que se desprendía de la información en (2) y usaran este dato para ver cuál de todos los productos de números enteros que dan 48, tenían una diferencia de dos unidades entre ellos.

## PREGUNTA 77

En el piso de un gimnasio se ha dibujado una circunferencia, Ingrid cruza desde un punto P de esta circunferencia hasta otro punto Q de ella, siendo su trayectoria una línea recta. Luego, Viviana desde un punto R de la circunferencia cruza en línea recta hasta otro punto S de ella, pasando por el punto medio (T) de  $\overline{PQ}$ . Se puede determinar la distancia que recorrió Viviana, si:

- (1) Ingrid recorrió 10 metros.
- (2) La medida de  $\overline{ST}$  corresponde al 40% de la medida de  $\overline{PQ}$ .

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Geometría

**Área Temática:** Geometría Proporcional

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

**Contenido:** Relaciones entre segmentos de cuerdas en una circunferencia.

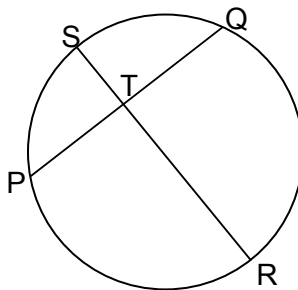
**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** C

### COMENTARIO

Para responder esta pregunta, el postulante debe comprender la información entregada en el enunciado, para representarla gráficamente y analizar si se puede determinar la distancia recorrida por Viviana, teniendo en consideración la relación existente entre los segmentos que se forman al intersectar dos cuerdas de una circunferencia.

De esta manera, al interpretar la información dada en el enunciado, se puede hacer la representación gráfica que se muestra a continuación, donde PQ es la distancia recorrida por Ingrid, SR la distancia recorrida por Viviana y  $PT = TQ$ .



De (1) se tiene que Ingrid recorrió 10 metros, o sea,  $PQ = 10$  metros, de donde  $PT = TQ = 5$  metros, pero nada se sabe del segmento SR, por lo que no se puede determinar lo solicitado.

De (2) se sabe que la medida de  $\overline{ST}$  corresponde al 40% de la medida de  $\overline{PQ}$ , es decir,  $ST = \frac{40}{100} \cdot PQ$ , pero no se conoce la medida del segmento PQ, de manera que con esta información tampoco se puede determinar lo pedido en el enunciado.

Ahora, al juntar la información de (1) y de (2) se puede determinar la medida del segmento ST, ya que  $PT = TQ = 5$  metros y  $ST = \frac{40}{100} \cdot 10 = 4$  metros, luego al relacionar los segmentos de cuerda de la figura, se tiene que  $ST \cdot TR = PT \cdot TQ$  y al reemplazar por las medidas respectivas se puede determinar la medida del segmento TR y por lo tanto, la medida del segmento SR, pues  $SR = ST + TR$ .

Como al juntar la información dada en (1) con la dada en (2) se puede determinar la distancia que recorrió Viviana, la clave es C) y el distractor con mayor adhesión fue A), con un 13% de las preferencias, es posible que los postulantes marcaran esta opción al realizar una mala representación de los datos dados en el enunciado, donde el punto T queda como centro de la circunferencia, concluyendo que los segmentos PQ y RS serían diámetros de ella y tendrían igual medida.

## PREGUNTA 78

Se puede determinar que Q es un número irracional, si se sabe que:

- (1)  $(Q + 1)^2 - (Q - 1)^2$  es un número irracional.  
(2)  $(Q + 1)^2 + (Q - 1)^2$  es un número racional.

- A) (1) por sí sola  
B) (2) por sí sola  
C) Ambas juntas, (1) y (2)  
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)  
E) Se requiere información adicional

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Números

**Área Temática:** Números

**Nivel:** Segundo Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender que los números irracionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números racionales, y los números reales como aquellos que corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.

**Contenido:** Conjunto de los números irracionales.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** A

## COMENTARIO

El postulante para responder este ítem debe considerar si la información dada en (1) y/o en (2) le permite determinar que Q es un número irracional.

En (1) se plantea que  $(Q + 1)^2 - (Q - 1)^2 = Q^2 + 2Q + 1 - Q^2 + 2Q - 1 = 4Q$  es un número irracional, y como 4 es un número racional, obligatoriamente Q debe ser un número irracional.

Ahora, en (2) se tiene que  $(Q + 1)^2 + (Q - 1)^2 = Q^2 + 2Q + 1 + Q^2 - 2Q + 1 = 2Q^2 + 2$  es un número racional, de donde se obtiene que  $Q^2$  debe ser un número racional, pero Q puede ser racional o irracional.

Como solo con la información dada en (1) se puede determinar que Q es un número irracional, la clave es A). En cuanto a los distractores, el de mayor frecuencia fue D), con un 16% de las preferencias, quizás los postulantes pensaron que Q podía ser de la forma  $\sqrt{n}$ , con n un número racional positivo, sin considerar que estos no eran los únicos valores que podía tomar Q.

## PREGUNTA 79

El gráfico de la función  $f(x) = x^2 - qx - 3$  es una parábola. Se puede determinar el valor de q, si se sabe que:

- (1) El gráfico de la parábola intersecta al eje x en el punto  $(-1, 0)$ .
- (2) Su vértice es el punto  $(1, -4)$ .

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Álgebra

**Área Temática:** Funciones

**Nivel:** Tercero Medio

**Objetivo Fundamental:** Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas.

**Contenido:** Representación gráfica de la función cuadrática.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** D

## COMENTARIO

Para resolver el ítem el postulante debe saber que para que un punto  $(a, b)$  pertenezca a la gráfica de una función cuadrática  $g(x) = mx^2 + nx + p$ , se debe cumplir que  $g(a) = b$  y que las coordenadas del vértice de la parábola asociada a esta función son  $V(h, k) = \left( \frac{-n}{2m}, g\left(\frac{-n}{2m}\right) \right)$ .

Así, para ver si se puede determinar el valor de q en la función  $f(x) = x^2 - qx - 3$  con la información dada en (1), que indica que la parábola asociada a esta función intersecta al eje x en el punto  $(-1, 0)$ , se puede usar el hecho de que este punto pertenece a la gráfica de f y por lo tanto,  $f(-1) = 0$ , es decir,  $(-1)^2 - q(-1) - 3 = 0$ , de donde se puede obtener el valor de q.

Por otro lado, en (2) se dice que la parábola tiene su vértice en el punto  $(1, -4)$ , y como la abscisa del vértice se puede determinar con los coeficientes de la función a través de la expresión  $\frac{-(-q)}{2 \cdot 1} = \frac{q}{2}$ , se llega a que  $\frac{q}{2} = 1$ , de donde se determina el valor de  $q$ .

Como con cada información, la dada en (1) o la dada en (2), se puede determinar el valor de  $q$ , se tiene que la clave es D). El distractor más seleccionado fue C), con una adhesión del 13%, posiblemente los postulantes pensaron que con ambas informaciones podían formar un sistema de ecuaciones de donde determinar el valor de  $q$ .

## PREGUNTA 80

De una población de  $n$  elementos se obtendrán todas las muestras de tamaño  $m$  que se pueden formar con ella, con  $n > m$  y donde las medias aritméticas de todas las muestras serán distintas. Se puede determinar la media de la población, si se conoce:

- (1) La media aritmética de cada muestra.
- (2) El valor de  $n$  y de  $m$ .

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

### FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

**Eje Temático:** Datos y Azar

**Área Temática:** Datos

**Nivel:** Primero Medio

**Objetivo Fundamental:** Comprender la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población.

**Contenido:** Relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población, con y sin reemplazo.

**Habilidad Cognitiva:** Analizar, sintetizar y evaluar

**Clave:** A

## COMENTARIO

Este ítem apunta a la propiedad que señala que la media de las medias aritméticas de todas las muestras de igual tamaño de una población es igual a la media de la población, independiente de si las muestras fueron extraídas con o sin reemplazo, la cual se puede usar para determinar la media de una población de  $n$  elementos a la que se le extraerán todas las muestras de tamaño  $m$ , con  $n > m$ .

La afirmación en (1) dice que se conoce la media aritmética de cada muestra, lo que implica que también se conoce el número total de muestras extraídas, ya que todas las medias de las muestras son distintas, de manera que la media de la población sería la suma de todas estas muestras dividida por el número total de muestras.

Ahora, la información dada en (2) entrega el valor de  $n$  y de  $m$ , o sea, se conoce el número total de elementos de la población y el tamaño de las muestras que se obtendrán, pero no se sabe nada de los promedios de las muestras para determinar la media de la población.

Como solo con los datos entregados en (1) se puede determinar lo pedido, la clave es A). En cuanto a los distractores, C) fue el más marcado por los postulantes con un 33% de las preferencias, quizás ellos lo eligieron al pensar que con (1) tenían las medias de las muestras y con (2) el total de muestras, lo que les permitiría determinar la media de la población, sin percatarse que el total de muestras está implícito en la información dada en (1).