PSU EN EL MERCURIO

EN ESTE NÚMERO ENCONTRARÁS LA TERCERA PARTE DE LA RESOLUCIÓN DE LA PSU 2010 DE MATEMÁTICA, EN LA QUE SE ANALIZAN PREGUNTAS DE GEOMETRÍA, EL EJE TEMÁTICO CON MENOR PORCENTAJE MEDIO DE RESPUESTAS CORRECTAS Y EL MAYOR PORCENTAJE MEDIO DE RESPUESTAS OMITIDAS.

RENDICIÓN PSU 2011:

ESTE AÑO SE ABRIRÁN MÁS SEDES

RENDICIÓN DE LA PSU:

Este año se suman tres sedes

QUE UN POSTULANTE PUEDA RENDIR LA PRUEBA DE SELECCIÓN UNIVERSITARIA EN LA MISMA LOCALIDAD DONDE RESIDE ES MUY BENEFICIOSO PARA ÉL EN TÉRMINOS ECONÓMICOS Y ACADÉMICOS. POR ESO, EL DEMRE CADA AÑO ABRE MÁS SEDES A LO LARGO DEL PAÍS. ESTE AÑO SE INCORPORÓ LONQUIMAY, PURRANQUE Y FUTALEUFÚ.

La gran mayoría de las personas que rinde año a año la Prueba de Selección Universitaria (PSU) no tiene que dedicar tiempos muy prolongados para desplazarse desde sus casas a los locales donde deben dar los exámenes.

Pero lamentablemente no todos tienen la misma suerte. Todavía hay quienes deben viajar de una localidad a otra para rendir las pruebas, lo que suma un obstáculo más a vencer esos días en que ya hay suficientes preocupaciones.

Tomando en cuenta esta situación, en el Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (Demre) de la Universidad de Chile —que es la entidad encargada de desarrollar y aplicar la PSU a lo largo de todo Chile— han tomado la tarea de sumar cada año más sedes de rendición para que los postulantes de los pueblos más apartados tengan las mismas facilidades que el resto a la hora de rendir las pruebas.

Este año se implementarán 169 sedes en todo Chile, gracias a la incorporación de las comunas de Lonquimay (Provincia de Malleco), Purranque (Provincia de Osorno) y Futaleufú (Provincia de Palena).

MODIFICA LOS DATOS SI ES NECESARIO

Si ya te inscribiste para rendir la PSU, recuerda que todavía estás a tiempo de modificar los datos relacionados a las sedes si es que así lo requieres. Lo puedes hacer directamente en el Portal del Postulante en el sitio web del Demre (www.demre.cl).

Es importante que esa información esté al día, ya que el material no es ilimitado y se distribuye en las distintas sedes a lo largo de Chile, de acuerdo a lo que se detalló en el registro inscripción. No te arriesgues a que algo pueda fallar esos días.

BUEN RECIBIMIENTO

En el Demre cuentan que la respuesta de los habitantes de estas ciudades fue muy positiva, ya que “para ellos es muy importante tener una sede de rendición en su comuna, pues les permite rendir la PSU sin tener que desplazarse, en muchos casos, bastantes kilómetros, lo que añade un nuevo factor de preocupación en el día de la rendición”.

Durante el periodo ordinario de inscripción para la PSU, se registraron 97 personas en Lonquimay, 220 en Purranque, y 23 en Futaleufú, cifras que podrían aumentar en el caso de que se anuncie la apertura de un proceso extraordinario en los próximos días.

¿Cuál es el plan del Demre en materia de cobertura para los próximos años? En este organismo de la Universidad de Chile explican que seguirán dispuestos a abarcar aquellas zonas geográficas que, teniendo alumnos en cuarto año de enseñanza media, se encuentran razonablemente alejadas de sedes de rendición de pruebas.

Por lo tanto, cada año, una vez que las unidades educativas del país informan la matrícula de los alumnos del último nivel, se determinará si se procede o no a la apertura.

“En términos de trabajo, abrir nuevas sedes no es de gran complejidad, como sí lo es en términos económicos, por lo que implica trasladar personal y material”, explican.

Esta política de integración ejecutada por el Demre se ha mantenido en el tiempo. Es así como durante los últimos cinco años se han creado un total de 31 sedes, entre las que destacan Juan Fernández, Ayacara, Puerto Cisne, Putre y Hualaihué, entre otras.

RESOLUCIÓN DE LA PRUEBA OFICIAL DE MATEMÁTICA
PARTE III

PRESENTACIÓN

La presente publicación se abocará al análisis de las preguntas Nº 39 a la Nº 58, correspondientes al Eje Temático de Geometría, publicadas el 7 de julio del presente año.

Las preguntas apuntan a contenidos de primero a cuarto año medio. En los comentarios de ellas se especifica el contenido que está involucrado y los tópicos previos que son necesarios para su resolución. Además, para cada una se indica el grado de dificultad con que resultó, el porcentaje de omisión que tuvo y se señalan los errores más comunes que probablemente cometieron los alumnos en la resolución de estos ítemes.

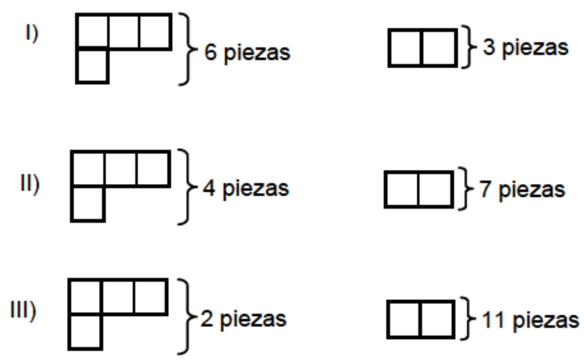
Cabe señalar que de los cuatro Ejes Temáticos evaluados en la PSU® de Matemática, Geometría es el que presenta, año a año, el menor porcentaje medio de respuestas correctas y el mayor porcentaje medio de respuestas omitidas, en especial en los contenidos de tercero y cuarto año medio.

Por lo que es importante, tanto para profesores como para estudiantes, estudiar todos los contenidos de este Eje Temático para mejorar estos porcentajes. También, para responder las preguntas de Geometría, los postulantes deben por una parte, haber desarrollado las habilidades cognitivas, desde la más básica, que es de Reconocimiento, hasta las de orden superior donde deben tener la capacidad de realizar Análisis, Síntesis y Evaluación y por otra parte, recordar y aplicar los conocimientos previos que se suponen internalizados durante la Enseñanza Básica. Como así mismo, deben aplicar en varias preguntas operaciones y propiedades del Álgebra que se estudian en la Enseñanza Media.

COMENTARIOS DE LAS PREGUNTAS REFERIDAS AL EJE TEMÁTICO DE GEOMETRÍA

PREGUNTA 39

Se desea embaldosar (o teselar) un patio de 6 m de largo por 5 m de ancho, como el que aparece en la cuadrícula de la figura 3. Para ello se tienen prefabricadas piezas formadas por cuatro ó dos cuadrados de 1 m de lado cada uno, ¿con cuál(es) de las combinaciones de las piezas que aparecen en I), en II) y en III) es posible embaldosar completamente el patio, sin que sobren piezas ni partes de ellas?



A) Sólo con III
B) Sólo con I y con II
C) Sólo con I y con III
D) Sólo con II y con III
E) Con I, con II y con III

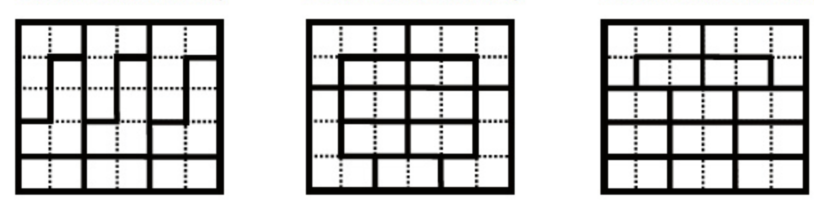
fig. 3

COMENTARIO

Esta pregunta apunta al contenido de análisis de la posibilidad de embaldosar el plano con algunos polígonos. En este caso, el postulante debe identificar si la combinación entre las piezas que aparecen en I), en II) y en III) pueden embaldosar el patio representado por el rectángulo de la figura 3.

Así, las combinaciones de las piezas que aparecen en I), en II) y en III), permiten teselar el rectángulo, por ejemplo, como se muestra en las siguientes figuras:

Con la combinación en I) | Con la combinación en II) | Con la combinación en III)



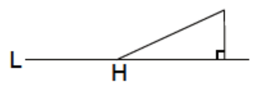
Luego, la clave está en la opción E), que fue seleccionada por el 40% de los postulantes que abordaron el ítem, por lo que éste resultó de mediana dificultad y la omisión fue del 27%.

El distractor más marcado fue D), con un 17% de las preferencias, lo que indica que los postulantes que marcaron esta opción no fueron capaces de encontrar una combinación con las piezas que aparecen en I), con las que se teselara el patio.

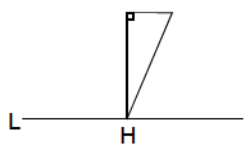
PREGUNTA 40

El triángulo rectángulo de la figura 4, se rota en 60° en torno a su vértice H, en sentido horario y luego en 120° en sentido antihorario, con respecto al mismo punto. Si H pertenece a la recta horizontal L, ¿cuál de las siguientes opciones indica mejor el lugar donde queda ubicado el triángulo después de estas rotaciones?

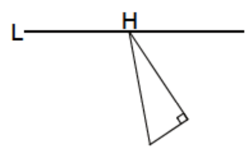
fig. 4



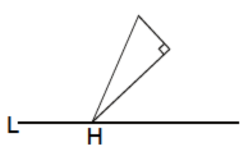
A)



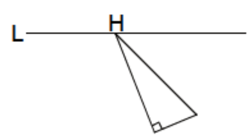
B)



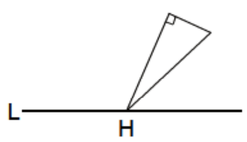
C)



D)

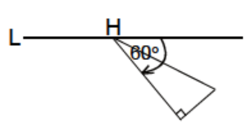


E)

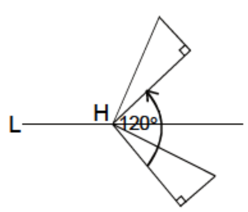


COMENTARIO

El contenido al que se refiere el ítem es el de rotaciones de figuras planas. En primer lugar, se debe rotar el triángulo de la figura 4, en torno a su vértice H en 60° en sentido horario, obteniéndose la siguiente figura:



Ahora, el triángulo obtenido hay que rotarlo en 120° en sentido antihorario en torno al mismo punto H, tal como se muestra en la siguiente figura:



Luego, la opción C) indica mejor la posición donde queda ubicado el triángulo después de realizar las dos rotaciones. Esta opción fue marcada por el 42% de los postulantes que enfrentaron el ítem, por lo que éste resultó de mediana dificultad y la omisión fue de un 30%.

En cuanto a los distractores, A) y D) fueron los más seleccionados. El primero con un 9% de las preferencias, aquí probablemente los estudiantes no se dieron cuenta que el triángulo estaba cambiado por su simétrico y el segundo fue seleccionado con un 8% de las preferencias, posiblemente aquí los alumnos se quedaron sólo con la primera rotación, o bien, realizaron ambas rotaciones, pero confundieron los sentidos horario y antihorario.

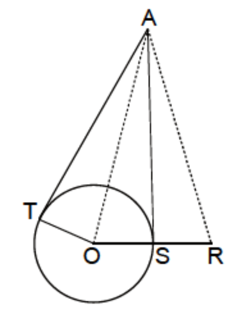
PREGUNTA 41

En la figura 5, $\overline{AT}$ y $\overline{AS}$ son tangentes a la circunferencia de centro O en T y en S, respectivamente. Si S es el punto medio del segmento OR, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

I) $\measuredangle$ AOS = $\measuredangle$ ARS
II) $\measuredangle$ TAO = $\measuredangle$ OAS
III) $\measuredangle$ TAO = $\measuredangle$ SAR

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas.

fig. 5



COMENTARIO

Esta pregunta está relacionada con los criterios de congruencia de triángulos y las propiedades que tienen los segmentos tangentes a una circunferencia que parten de un mismo punto.

Con los datos del enunciado se puede concluir que en la figura 5, Δ SOA ≅ Δ SRA por el el criterio de congruencia de triángulos LAL (lado-ángulo-lado), ya que $\overline{AS}$ es un lado común a ambos triángulos, $\measuredangle$ OSA = $\measuredangle$ RSA = 90° por ser $\overline{AS}$ tangente a la circunferencia y $\overline{SR} \cong \overline{OS}$ por ser S punto medio de $\overline{OR}$. Por lo tanto, $\measuredangle$ AOS = $\measuredangle$ ARS al ser ángulos correspondientes de los triángulos mencionados, luego la igualdad planteada en I) es verdadera.

Por otro lado, se tiene que Δ TOA ≅ Δ SOA por el criterio LAL, pues $\overline{OT} \cong \overline{OS}$ por ser ambos radios de la circunferencia, $\measuredangle$ ATO = $\measuredangle$ ASO = 90°, ya que una tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado al punto de tangencia y $\overline{AT} \cong \overline{AS}$, pues ambos son segmentos que parten de un mismo punto y son tangentes a una misma circunferencia. Por lo tanto, $\measuredangle$ TAO = $\measuredangle$ OAS, así la igualdad en II) es verdadera.

Por último, como Δ SRA ≅ Δ SOA y Δ SOA ≅ Δ TOA, se tiene que Δ SRA ≅ Δ TOA y que $\measuredangle$ TAO = $\measuredangle$ SAR , luego la igualdad en III) también es verdadera.

Como las tres igualdades son verdaderas se tiene que la opción correcta es D), la que fue marcada por el 36% de las personas que abordaron el ítem, lo que indica que éste resultó difícil y la omisión fue de un 43%.

El distractor B) fue el más seleccionado con el 8% de las preferencias, es posible que los postulantes no pudieran determinar la congruencia existente entre los triángulos SRA y TOA, a partir de la congruencia de ambos con el Δ SOA.

PREGUNTA 42

¿Cuál de las siguientes figuras geométricas tiene menos de dos ejes de simetría?

A) Trapecio isósceles
B) Rectángulo
C) Cuadrado
D) Rombo
E) Circunferencia

COMENTARIO

Esta pregunta apunta al contenido de ejes de simetría de figuras planas y para contestarla correctamente, los alumnos deben reconocer cuál de las figuras nombradas en las opciones tiene menos de dos ejes de simetría.

Es así como, el trapecio isósceles tiene un eje de simetría, que corresponde a la recta que pasa por los puntos medios de los lados paralelos del trapecio.

El rectángulo tiene dos ejes de simetría, que corresponden a las rectas que pasan por los puntos medios de sus lados opuestos.

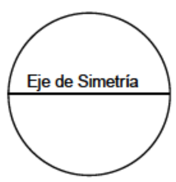
El cuadrado tiene cuatro ejes de simetría, que son las dos rectas que pasan por los puntos medios de sus lados opuestos y dos rectas que pasan por dos vértices opuestos.

El rombo tiene dos ejes de simetría, que son las dos rectas que pasan por dos vértices opuestos.

La circunferencia tiene infinitos ejes de simetría, correspondientes a todas las rectas que contienen a todos los diámetros que se pueden trazar en ella.

Como el trapecio isósceles es la única figura de las mencionadas en las opciones que tiene menos de dos ejes de simetría, la opción correcta es A), que fue marcada por el 35% de los postulantes que abordaron el ítem, resultando éste difícil y la omisión fue del 37%.

El distractor E) es el que obtuvo una mayor preferencia, con un 18%, es posible que los postulantes que optaron por él, piensen que el único eje de simetría que tiene la circunferencia es un diámetro como se muestra en la figura adjunta, sin reconocer que el resto de las rectas que contienen a los diámetros también dividen a la circunferencia en dos figuras congruentes.

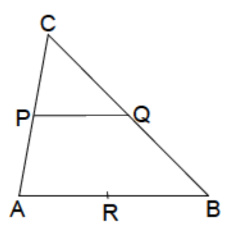


PREGUNTA 43

En el triángulo ABC de la figura 6, P y Q son los puntos medios de los lados respectivos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si el triángulo ABC es equilátero, entonces QC = PA.
B) PQ es la mitad de AB.
C) Los triángulos QPB y PQA son siempre congruentes.
D) Si R es el punto medio de $\overline{AB}$, entonces Δ PQC $\cong$ Δ PQR.
E) Los triángulos PQC y ABC son semejantes.

fig. 6



COMENTARIO

Este ítem apunta a la comprensión del concepto de congruencia de triángulos. Los postulantes para contestarlo correctamente deben recordar de la Enseñanza Básica las características de un triángulo equilátero y las propiedades de las medianas de un triángulo.

Del enunciado se deduce que PA = PC y QC = QB, ya que P y Q son los puntos medios de los lados respectivos.

En A), si Δ ABC es equilátero, entonces $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, luego PA = PC = QC = QB, lo que indica que la afirmación planteada en esta opción es verdadera.

La afirmación en B) también es verdadera, pues al ser $\overline{PQ}$ mediana del Δ ABC, ésta mide la mitad de $\overline{AB}$.

En cambio la afirmación en C) es falsa, ya que los triángulos QPB y PQA no son siempre congruentes, debido a que sólo tienen un lado común y los otros pares de lados sólo serían congruentes, si el Δ ABC fuese equilátero o isósceles de base $\overline{AB}$.

Ahora en D), si R es punto medio de $\overline{AB}$, entonces $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{PR}$ son las medianas del Δ ABC y por lo tanto, estos segmentos lo dividen en cuatro triángulos congruentes entre sí, luego Δ PQC $\cong$ Δ PQR, lo que indica que la afirmación de esta opción es verdadera.

Por último, en E) se tiene que la afirmación es verdadera, ya que los triángulos PQC y ABC son semejantes, demostrable por ejemplo, por el criterio de semejanza de triángulos LAL (dos pares de lados proporcionales y los ángulos comprendidos entre estos lados congruentes). En efecto, el $\sphericalangle$ ACB es común a ambos triángulos, PC = $\frac{1}{2}$AC y CQ = $\frac{1}{2}$CB.

Por el desarrollo realizado, la opción correcta es C), la cual fue seleccionada por el 22% de los postulantes que abordaron el ítem, por lo que éste resultó difícil y la omisión fue de un 41%.

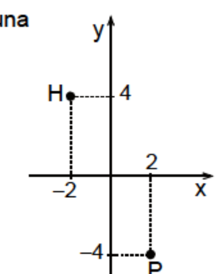
El distractor más marcado fue B) con un 17%, quizás los alumnos se dejaron llevar por la figura, la cual produce un efecto visual que podría inducir a pensar que el segmento PQ es mayor a la mitad de $\overline{AB}$ y no reconocen que una mediana de un triángulo es siempre la mitad del lado opuesto.

PREGUNTA 44

En la figura 7, el punto H se transforma en el punto P si se le aplica una

A) simetría axial con respecto al eje x.
B) simetría axial con respecto al eje y.
C) traslación según el vector (–2, 4).
D) simetría puntual con respecto al origen.
E) traslación según el vector (2, –4).

fig. 7



COMENTARIO

El contenido involucrado en esta pregunta es el de transformaciones isométricas en el sistema de ejes coordenados, en particular la traslación y la simetría axial y la puntual.

De la figura se tiene que la transformación isométrica que se aplique al punto H(–2, 4) debe dar por resultado el punto P(2, –4).

Luego, si a H se le aplica una simetría axial con respecto al eje x, entonces se obtiene el punto (–2, –4) y si se le aplica con respecto al eje y se obtiene el punto (2, 4), por lo que se descartan las opciones A) y B).

Ahora, si H se traslada según el vector (–2, 4), se obtiene el punto (–4, 8) y si se traslada según el vector (2, –4), entonces se obtiene el punto (0, 0), luego se descartan las opciones C) y E).

En cambio, si a H se le aplica una simetría puntual con respecto al origen, se obtiene el punto P(2, –4), ya que el origen, H y P son puntos colineales y la distancia de H al origen y de P al origen es la misma.

Por lo tanto, la opción correcta es D), la que fue marcada por el 27% de los postulantes que abordaron el ítem, lo que indica que éste resultó difícil y hubo una omisión cercana al 50%.

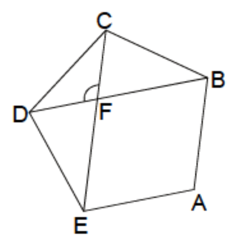
El 12% de los postulantes eligió el distractor E), es posible que ellos confundieron el vector de traslación con las coordenadas del punto P.

PREGUNTA 45

En la figura 8, ABCDE es un pentágono regular, el valor del ∢ DFC es

A) 108°
B) 90°
C) 100°
D) 72°
E) 120°

fig. 8



COMENTARIO

Esta pregunta apunta a la resolución de problemas relativos a la descomposición de polígonos en figuras elementales congruentes, donde el estudiante debe recordar de la Enseñanza Básica que un pentágono regular tiene todos sus lados de igual medida y todos sus ángulos interiores iguales a 108°.

Para encontrar la medida del ∢ DFC, el postulante debe identificar que el triángulo EDC es isósceles, ya que $\overline{DE} \cong \overline{DC}$ y como ∢ EDC = 108°, se tiene que ∢ DCE = ∢ DEC = 36°, luego, como Δ EDC ≅ Δ DCB, por tener dos pares de lados congruentes y el ángulo comprendido entre ellos de igual medida, se tiene que ∢ CBD = 36°. Finalmente, en el Δ DFC, ∢ CDF + ∢ DCF + ∢ DFC = 180°, es decir, 36° + 36° + ∢ DFC = 180°, por lo tanto, ∢ DFC = 108°, valor que se encuentra en la opción A).

Esta pregunta resultó difícil, ya que sólo el 16% de los postulantes que la abordaron la contestaron correctamente y su omisión fue de un 46%.

El distractor más marcado fue D) con un 13%, posiblemente quienes optaron por él consideraron que en un pentágono la suma de los ángulos interiores es 360°, asignándole a cada ángulo interior 72°, luego al considerar los triángulos EDC y DCB isósceles, obtuvieron que ∢ DCF = 54° y ∢ CDB = 54°, por lo que concluyen que ∢ DFC = 72°, o bien pensaron que F era el centro del pentágono regular y calcularon el ángulo pedido como 360° : 5 = 72°.

PREGUNTA 46

En la figura 9, P es el punto medio del trazo QS y PQ : PR = 5 : 3. Si PR = 12 cm, entonces la medida del segmento RS es

A) 4 cm
B) 2 cm
C) 20 cm
D) 10 cm
E) 8 cm

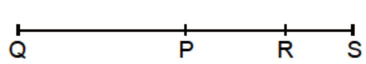


fig. 9

COMENTARIO

El alumno para responder correctamente este ítem debe saber aplicar la división interior de un trazo en una razón dada.

Así, por un lado, si en la proporción PQ : PR = 5 : 3, se reemplaza el valor entregado para PR, se tiene que $\frac{PQ}{12} = \frac{5}{3}$, y al despejar PQ en la ecuación, se obtiene que PQ = 20 cm. Por otro lado, del enunciado se tiene que P es el punto medio del trazo QS, por lo que PQ = PS, así PS = 20 cm. Ahora, en la igualdad PS = PR + RS, se reemplazan los valores de PS y PR obteniendo que RS = 8 cm, medida que se encuentra en la opción E).

Este ítem resultó de mediana dificultad, ya que el 47% de los postulantes que abordó la pregunta la contestó correctamente y su omisión fue del 32%.

El distractor más marcado por los estudiantes fue A) con un 9% de las preferencias. Posiblemente los postulantes que optaron por él, resolvieron el problema considerando que como PQ : PR = 5 : 3, entonces PQ = 5k y PR = 3k, con k la constante de proporcionalidad, y como PR = 12 cm se tiene que 3k = 12, de donde k = 4 y se quedaron con este valor, sin darse cuenta que se pedía la medida de RS que equivale a 2k.

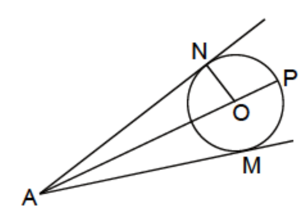
PREGUNTA 47

En la figura 10 las rectas AN y AM son tangentes a la circunferencia de centro O en los puntos N y M, respectivamente y la recta AO intersecta a la circunferencia en el punto P. ¿Cuál(es) de las siguientes relaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\overline{AM} \cong \overline{AN}$
II) $\overline{ON} \perp \overline{AN}$
III) $AN^2 = AO \cdot OP$

A) Sólo II
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

fig. 10



COMENTARIO

Esta pregunta apunta al contenido de teoremas relativos a proporcionalidad de trazos en la circunferencia, entre ellos el teorema de la tangente y de la secante que se trazan desde un mismo punto. Además, el postulante debe reconocer algunas propiedades de las rectas tangentes a la circunferencia, para así determinar la veracidad de las afirmaciones en I), en II) y en III).

Las rectas AN y AM son tangentes a la circunferencia en los puntos N y M, respectivamente, y por propiedad de las tangentes se tiene que $\overline{AM} \cong \overline{AN}$, luego la afirmación en I) es verdadera.

En II), como $\overline{ON}$ es un radio de la circunferencia y N es el punto de tangencia de la recta AN a la circunferencia, se cumple que $\overline{ON} \perp \overline{AN}$, por lo que la afirmación en II) es verdadera.

Ahora, si se designa por Q al punto de intersección entre $\overline{AP}$ y la circunferencia, que es distinto de P, se tiene por el teorema de la tangente y de la secante que $AN^2 = AQ \cdot AP$, relación que es distinta a la planteada en la afirmación III), por lo que ésta es falsa.

Del análisis realizado la opción correcta es B). Esta pregunta resultó difícil, ya que el 26% de quienes la abordaron la contestaron correctamente y su omisión fue de un 57%.

El distractor más marcado fue E) con un 6%, los postulantes que lo eligieron, establecieron que la afirmación en III) era verdadera, posiblemente aplicaron en forma erronea el teorema de la tangente y de la secante.

PREGUNTA 48

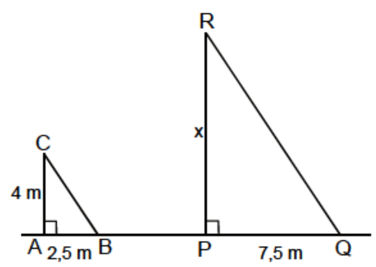
Un velero tiene dos mástiles verticales a la cubierta. El menor de ellos mide 4 m y proyecta una sombra sobre la cubierta de 2,5 m y en ese mismo instante, el mástil mayor proyecta una sombra de 7,5 m. La altura del mástil mayor mide

A) 9 m
B) 4,6 m
C) 12 m
D) 8 m
E) ninguno de los valores anteriores.

COMENTARIO

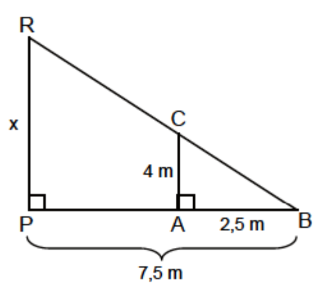
Este ítem apunta al contenido de teoremas relativos a la proporcionalidad de trazos en triángulos semejantes.

La siguiente figura es un ejemplo de cómo representar la situación planteada en el enunciado del ítem, donde x es la altura del mástil mayor.



Los segmentos BC y QR representan los rayos solares, los cuales son paralelos, luego $\measuredangle$ ABC = $\measuredangle$ PQR y como $\measuredangle$ CAB = $\measuredangle$ RPQ = 90°, por el criterio de semejanza AA (ángulo-ángulo), se tiene que Δ ABC ~ Δ PQR y por lo tanto, se cumple que los lados correspondientes de estos triángulos están en proporción, es decir, $\frac{4}{x} = \frac{2,5}{7,5}$, de donde x = 12 m.

También, se puede representar la situación planteada en el enunciado, a través de la siguiente figura:



En este caso el valor de la altura del mastil (x) se determina aplicando el teorema de Thales, es decir $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{PR}$.

Así, la opción correcta es C), la cual fue seleccionada por el 49% de los postulantes que abordaron la pregunta, resultando ésta de mediana dificultad y su omisión fue de un 28%.

El distractor más marcado fue A) con un 10% de las preferencias, posiblemente quienes optaron por él calculan la diferencia entre las medidas de las sombras (5 m) y establecen que la diferencia entre las medidas de los mástiles debe ser la misma, por lo que concluyen que el mástil mayor mide 9 m, en el caso de haber realizado la primera figura. En el caso de la segunda, es posible que formularan mal el teorema de Thales, es decir, plantean la proporción $\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{PR}$.

PREGUNTA 49

Sea un triángulo rectángulo M de catetos 4 cm y 6 cm. ¿Con cuál(es) de las siguientes medidas de catetos se puede construir un triángulo semejante a M?

I) 2 cm y 3 cm
II) 3 cm y 8 cm
III) 1 cm y $\frac{3}{2}$ cm

A) Sólo con I
B) Sólo con II
C) Sólo con I y con II
D) Sólo con I y con III
E) Con I, con II y con III

COMENTARIO

Esta pregunta está referida al contenido de semejanza de triángulos. Para resolverla el postulante debe comprobar si es posible construir un triángulo semejante al triángulo M del enunciado, con las medidas dadas en I), en II) y en III).

Para esto hay que saber que dos triángulos ABC y DEF son semejantes si se cumple que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, $\frac{BC}{CA} = \frac{EF}{FD}$ y $\frac{CA}{AB} = \frac{FD}{DE}$, por lo tanto, del enunciado del ítem la razón entre los catetos de los triángulos semejantes a M debe ser $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

En I), la razón entre las medidas de los lados es $\frac{2}{3}$, luego, es posible construir un triángulo semejante a M con estas medidas.

En II), la razón entre las medidas de los lados es $\frac{3}{8}$, por lo que no es posible construir un triángulo semejante a M.

En III), la razón entre las medidas de los lados es $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$, por lo tanto, sí es posible construir un triángulo semejante a M con estas medidas.

Del desarrollo anterior se concluye que la clave es D). Esta pregunta resultó difícil, ya que el 25% de los estudiantes que la abordó la contestó correctamente y su omisión fue de un 43%.

El distractor más marcado fue A) con un 17% de las preferencias, quienes optaron por él, seguramente, con las medidas 1 cm y $\frac{3}{2}$ cm, escriben la razón $\frac{1}{\frac{3}{2}}$ y no aplican bien la operatoria de fracciones llegando a la igualdad $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$.

PREGUNTA 50

En la figura 11, la secante $\overline{PB}$ intersecta a la circunferencia de centro O en los puntos A y B, y la secante $\overline{PD}$ la intersecta en los puntos C y D. Los segmentos AD y CB se intersectan en E, $\measuredangle$ AEC = 45° y $\measuredangle$ APC = 40°. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\measuredangle$ BOD = 85°
II) $\measuredangle$ ABC = 2,5°
III) $\measuredangle$ BCD = 42,5°

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

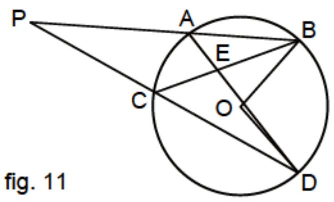


fig. 11

COMENTARIO

Para la resolución de esta pregunta el postulante debe utilizar ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia y el teorema que los relaciona. Para ello, se designará por α a la medida del ángulo ADC.

De la figura es posible determinar que los ángulos ADC y ABC son congruentes, ya que son ángulos inscritos en la circunferencia que subtienden el mismo arco y el ángulo BAD es exterior al triángulo PDA, luego $\measuredangle$ BAD = α + 40° = $\measuredangle$ BAE. Por otro lado, del enunciado se tiene que $\measuredangle$ AEC = 45°, por lo que $\measuredangle$ AEB = 135°, así en el Δ BAE, se tiene $\measuredangle$ BAE + $\measuredangle$ AEB + $\measuredangle$ EBA = 180°, es decir, (α + 40°) + 135° + α = 180°, de donde α = 2,5° = $\measuredangle$ ABC, luego la igualdad en II) es verdadera.

Ahora, el $\measuredangle$ BOD al ser ángulo del centro mide el doble del ángulo interior DAB, ya que subtienden el mismo arco y como $\measuredangle$ DAB = α + 40° = 42,5°, entonces el $\measuredangle$ BOD mide 85°, así la igualdad en I) es verdadera.

Finalmente, la afirmación en III) también es verdadera, pues el ángulo inscrito BCD es congruente con el ángulo inscrito DAB, ya que subtienden el mismo arco, de esta manera $\measuredangle$ BCD mide 42,5°.

Del desarrollo anterior se tiene que la opción correcta es E). Esta pregunta resultó muy difícil, ya que sólo el 7% de quienes la abordaron la contestaron correctamente y tuvo una alta omisión, de un 74%.

El distractor D) fue el más elegido por los postulantes (7%), quienes optaron por él, seguramente, al considerar el $\measuredangle$ AEC = 45° y el $\measuredangle$ ABC que subtiende el mismo arco, aplicaron erroneamente el teorema que relaciona un ángulo inscrito con un ángulo del centro, llegando a que $\measuredangle$ ABC = 22,5°, concluyendo que la afirmación en II) es falsa.

PREGUNTA 51

Un farol está en un poste, a 5 metros del suelo. En la noche, una persona de 1,5 metros de altura está a una distancia **x** de la base del poste e **y** es la longitud de la sombra que la persona proyecta en el suelo, si dicha situación se representa en la figura 12, entonces **y** en términos de **x** es

A) $y = \frac{1{,}5}{3{,}5} \cdot x$
B) $y = \frac{1{,}5}{5} \cdot x$
C) $y = \frac{x}{3{,}5}$
D) $y = \frac{5}{1{,}5} \cdot x$
E) $y = \frac{5}{1{,}5 \cdot x}$

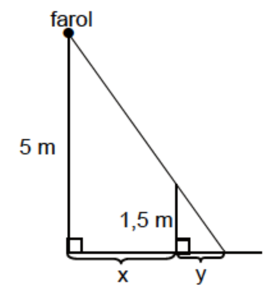
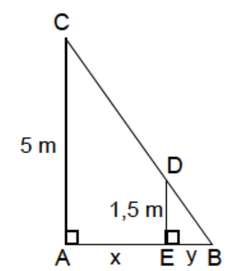


fig. 12

COMENTARIO

Este ítem apunta al contenido de planteo y resolución de problemas relativos a trazos proporcionales, donde se aplica el teorema de Thales.

Con el fin de simplificar la explicación de la resolución del problema se asignan letras a los vértices de los triángulos de la figura 12, como se muestra en la figura adjunta:



Como los águlos BAC y BED son rectos, se tiene que $\overline{AC}$ // $\overline{ED}$ y por lo tanto, en el Δ ABC se puede aplicar el teorema de Thales, en efecto, $\frac{BE}{ED} = \frac{BA}{AC}$, reemplazando los datos de la figura se obtiene $\frac{y}{1{,}5} = \frac{x+y}{5}$, luego aplicando la propiedad fundamental de las proporciones se tiene que 5y = 1,5x + 1,5y, finalmente despejando y, en términos de x, se llega a $y = \frac{1{,}5}{3{,}5} \cdot x$.

Del desarrollo anterior se concluye que la opción correcta es A), la que fue seleccionada por el 13% de los estudiantes que abordaron el ítem, resultando éste difícil y su omisión fue de un 63%.

El distractor de mayor preferencia fue B) con un 12%, quienes optaron por él posiblemente plantean en forma incorrecta la proporción, escribiendo $\frac{BE}{ED} = \frac{EA}{AC}$ y al reemplazar los datos obtienen $\frac{y}{1{,}5} = \frac{x}{5}$, luego, al despejar y en la ecuación, resulta $y = \frac{1{,}5}{5} \cdot x$.

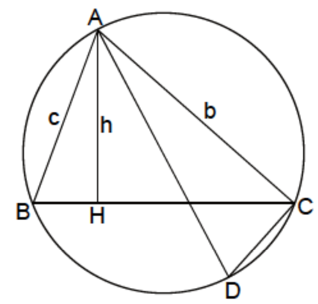
PREGUNTA 52

En la figura 13, el triángulo ABC está inscrito en la circunferencia de radio r, $\overline{AH}$ es altura y $\overline{AD}$ es un diámetro de la circunferencia. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ADC$
II) $\Delta AHB \sim \Delta ACD$
III) $\frac{c}{2r} = \frac{h}{b}$

A) Sólo II
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

fig. 13



COMENTARIO

Para abordar este ítem el estudiante debe recordar los criterios de semejanza de triángulos, en particular AA, saber que si dos triángulos son semejantes, entonces las medidas de sus lados correspondientes (homólogos) son proporcionales y que dos ángulos inscritos en una circunferencia que subtienden un mismo arco tienen igual medida.

De la figura, se tiene que los ángulos inscritos ABC y ADC subtienden el mismo arco, por lo tanto tienen igual medida. De esta manera la afirmación en I) es verdadera.

Por otro lado, se tiene que el ángulo inscrito ACD es recto, ya que subtiende una semicircunferencia y como $\overline{AH}$ es altura, se tiene que el ángulo AHB también es recto, además como $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ADC$ y por el criterio de semejanza AA los triángulos AHB y ACD son semejantes, por lo que la afirmación en II) es verdadera.

Ahora bien, como $\Delta AHB \sim \Delta ACD$, entonces las medidas de sus lados correspondientes son proporcionales, es decir, $\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC}$. Ahora, reemplazando los valores entregados en la figura y considerando que $\overline{AD}$ al ser diámetro mide 2r, se tiene que $\frac{c}{2r} = \frac{h}{b}$, por lo que la afirmación en III) también es verdadera.

Del análisis anterior se tiene que la opción correcta es E), la cual fue seleccionada por el 6% de los postulantes que abordaron la pregunta, resultando ésta muy difícil y su omisión alcanzó un 71%.

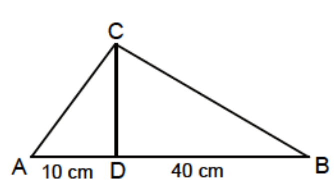
El distractor más marcado por quienes abordaron esta pregunta fue B), con un 8% de las preferencias. Los estudiantes que optaron por él, posiblemente no pudieron reconocer los lados homólogos entre los triángulos semejantes AHB y ACD y así plantean una relación erronea para III).

PREGUNTA 53

Si el Δ ABC de la figura 14 es rectángulo en C, entonces la medida de la altura $\overline{CD}$ es

A) 10 cm
B) 20 cm
C) 24 cm
D) $10\sqrt{5}$ cm
E) indeterminable con los datos dados.

fig. 14



COMENTARIO

En esta pregunta el postulante debe aplicar el Teorema de Euclides relativo a la altura, el que enuncia que el cuadrado de la medida de la altura sobre la hipotenusa es igual a la multiplicación de las medidas de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

En la figura $\overline{CD}$ es la altura trazada desde el vértice C, $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ son las proyecciones de los catetos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$, respectivamente. Al aplicar el teorema de Euclides se tiene que $CD^2 = AD \cdot DB = 10 \cdot 40$, por lo tanto, la medida de $\overline{CD}$ es 20 cm.

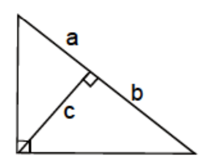
Así la opción correcta es B), la cual fue seleccionada por el 31% de los postulantes que abordaron la pregunta, resultando ésta difícil y su omisión fue de un 46%.

El distractor más marcado fue E) con un 13%, probablemente los postulantes que lo seleccionaron no conocen el teorema de Euclides, por lo que establecen que necesitan más datos para determinar la medida de $\overline{CD}$.

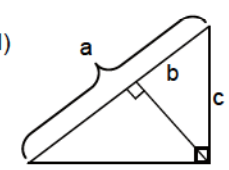
PREGUNTA 54

¿En cuál(es) de las siguientes figuras se cumple que $c^2 = a \cdot b$?

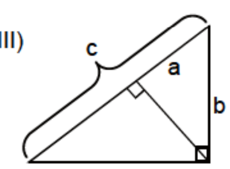
I)



II)



III)



A) Sólo en I
B) Sólo en II
C) Sólo en I y en II
D) Sólo en I y en III
E) En I, en II y en III

COMENTARIO

Al igual que en el ítem anterior, éste hace referencia al teorema de Euclides relativo a la altura, y además, hace referencia al del cateto del triángulo, el que enuncia que el cuadrado de la medida de uno de los catetos es igual al producto entre la medida de la hipotenusa y la medida de la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

En I), a y b son las medidas de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa y c corresponde a la medida de la altura trazada desde el vértice opuesto a ésta, luego aplicando el toerema de Euclides se cumple que $c^2 = a \cdot b$.

En II), se tiene que a corresponde a la medida de la hipotenusa, c es la medida de un cateto y b corresponde a la medida de la proyección de éste sobre la hipotenusa, luego, aplicando el teorema relativo al cateto se tiene que en este triángulo también se cumple que $c^2 = a \cdot b$.

En III), c corresponde a la medida de la hipotenusa, b es la medida de un cateto y a corresponde a la medida de la proyección de éste sobre la hipotenusa, aplicando el teorema del cateto en este triángulo se cumple que $b^2 = a \cdot c$, igualdad que no corresponde a la dada en el enunciado.

De esta manera, se tiene que sólo las medidas entregadas en los triángulos dados en I) y en II) se cumple que $c^2 = a \cdot b$, por lo que la opción correcta es C), la cual fue escogida por el 20% de los postulantes que abordaron la pregunta, resultando ésta difícil y su omisión fue de un 50%. Esta omisión junto a los resultados del ítem anterior demuestran el alto desconocimiento que hay del teorema de Euclides.

El distractor más marcado fue A), con un 15%. Posiblemente quienes optaron por él piensan que en un triángulo rectángulo se cumple que la medida de uno de los catetos es igual al producto de la medida de la hipotenusa con la medida de la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa, es decir, $c = a \cdot b$.

PREGUNTA 55

De acuerdo con los datos de la figura 15, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones indica(n) el valor de **b**?

I) $c(\text{sen } \alpha)$
II) $a(\text{tg } \alpha)$
III) $\sqrt{c^2 - a^2}$

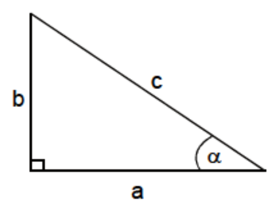


fig. 15

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) I, II y III

COMENTARIO

Para resolver esta pregunta de razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, el estudiante debe determinar si las expresiones entregadas en I), en II) y en III), corresponden al valor de b. Además, debe recordar de la Enseñanza Básica el teorema de Pitágoras.

En el triángulo rectángulo de la figura, c es la medida de la hipotenusa, b corresponde a la medida del cateto opuesto al ángulo α y a es la medida del cateto adyacente a este ángulo, por lo tanto, sen $\alpha = \frac{b}{c}$, ahora, despejando b en esta ecuación se tiene que $b = c(\text{sen } \alpha)$, concluyéndose que la expresión en I) indica el valor de b.

Por otra parte, tg $\alpha = \frac{b}{a}$, si en esta expresión se despeja b, se tiene que $b = a(\text{tg } \alpha)$, así la expresión en II) también representa el valor de b.

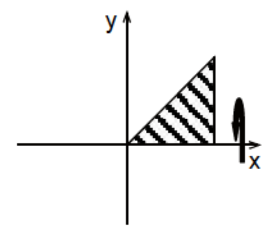
Finalmente, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que $c^2 = a^2 + b^2$, si se despeja b en esta expresión se obtiene $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, luego la expresión en III) también representa el valor de b.

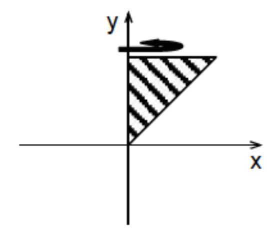
De esta manera, se obtiene que la opción correcta es E), la que fue seleccionada por el 20% de los estudiantes que abordaron la pregunta, resultando ésta difícil y su omisión alcanzó un 64%,.

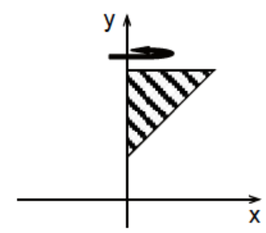
El distractor más marcado fue C), con un 7% de las preferencias. Los postulantes que optaron por él, posiblemente conocen el teorema de Pitágoras, pero no han internalizado correctamente las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

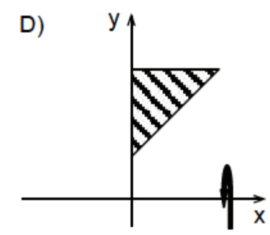
PREGUNTA 56

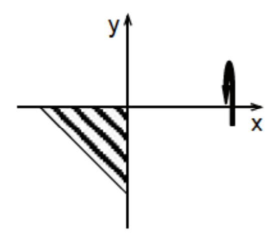
En las opciones, todos los triángulos achurados son rectángulos isósceles congruentes entre sí y tienen a lo menos un lado sobre uno de los ejes coordenados. Si al hacer girar cada uno de los triángulos indefinidamente, en el sentido de la flecha y en torno a uno de los ejes coordenados, se generan cuerpos geométricos, ¿en cuál de las opciones el volumen del cuerpo generado es distinto al de los otros cuerpos?

A)


B)


C)


D)


E)


COMENTARIO

Este ítem hace referencia a la resolución de problemas sobre volúmenes de cuerpos generados por rotación de figuras planas y para su solución el estudiante debe analizar el cuerpo que se genera en cada opción.

En efecto, en A), en B), en C) y en E) se genera un cono cuya altura y radio, en cada uno, corresponde a los catetos de triángulos rectángulos isósceles congruentes entre sí, todos de volumen igual a $\frac{1}{3}\pi r^3$, con r la medida de los catetos.

En cambio en D), al hacer girar indefinidamente el triángulo en torno al eje x, se obtiene un cilindro, al que se le ha extraído un cono truncado, cuyo volumen es distinto al de los cuerpos generados en las otras opciones.

Del análisis anterior se concluye que la opción correcta es D), la que fue marcada por el 33% de los postulantes que abordaron la pregunta, resultando ésta difícil y su omisión fue de un 45%.

El distractor más marcado fue E) con un 16%, posiblemente los postulantes al ver que es el único triángulo que tiene ambos catetos en los ejes, piensa que el cuerpo generado es distinto a los otros, o bien lo piensan por ser el único triángulo que está en un cuadrante distinto a los otros, donde los valores son negativos.

PREGUNTA 57

En el plano cartesiano de la figura 16, se ubican los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $3\vec{a} = (12, 15)$
II) $\vec{a} + \vec{b} = (7, 1)$
III) $-\vec{b} = (-3, -4)$

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

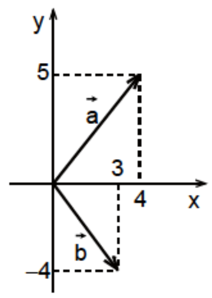


fig. 16

COMENTARIO

En esta pregunta de operatoria básica con vectores en el plano, el estudiante debe por un lado, recordar la multiplicación de un número real (escalar) por un vector, es decir, si un vector $\vec{v} = (x, y)$ se multiplica por un número real p, se tiene que $p\vec{v} = p(x, y) = (px, py)$, por otro lado debe recordar que la suma de dos vectores $\vec{v} = (x, y)$ y $\vec{u} = (r, t)$ es $\vec{v} + \vec{u} = (x, y) + (r, t) = (x + r, y + t)$.

Ahora, de la figura se deduce que las coordenadas del vector $\vec{a}$ son (4, 5) y las del vector $\vec{b}$ son (3, –4). Así, $3\vec{a} = 3(4, 5) = (12, 15)$ y $\vec{a} + \vec{b} = (4, 5) + (3, -4) = (7, 1)$, por lo tanto, las igualdades en I) y en II) son verdaderas.

Ahora, en III) se tiene que $-\vec{b} = -1(3, -4) = (-3, 4)$, valor que es distinto de (–3, –4). De acuerdo con el desarrollo anterior, la opción correcta es B), la que fue seleccionada por el 20% de los postulantes que abordaron el ítem, resultando éste difícil y su omisión alcanzó un 65%.

El distractor más marcado fue A) con un 5%, los postulantes que optaron por él, posiblemente, realizan equivocadamente la suma de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ o determinan en forma erronea las coordenadas del vector $\vec{b}$, concluyendo que II) es falsa.

PREGUNTA 58

En la figura 17, las coordenadas de los puntos D y F son (0, 5, 2) y (3, 0, 2), respectivamente. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El perímetro del rectángulo AOEF es 10 unidades.
II) El área del rectángulo OCDE es 10 unidades cuadradas.
III) El segmento AC mide $\sqrt{34}$ unidades.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

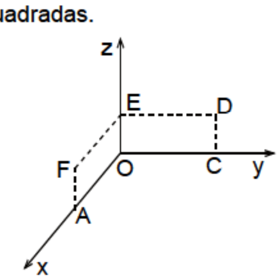


fig. 17

COMENTARIO

Esta pregunta está relacionada con el contenido de coordenadas cartesianas en el espacio.

Para determinar la veracidad de I), se debe obtener el perímetro del rectángulo AOEF, para ello es necesario encontrar las medidas de sus lados. Como las coordenadas del punto F son (3, 0, 2), entonces en el rectángulo AOEF se tiene que las coordenadas del punto A son (3, 0, 0) y las del punto E son (0, 0, 2). Ahora, el largo del rectángulo está dado por la distancia entre los puntos O y A, que es 3 unidades y el ancho está dado por la distancia entre O y E, que es 2 unidades, por lo tanto, el perímetro del rectángulo es 2(3 + 2) = 10 unidades, así la afirmación en I) es verdadera.

En II), como las coordenadas del punto D son (0, 5, 2), es posible establecer que las coordenadas del punto C son (0, 5, 0), luego el largo del rectángulo OCDE que está dado por la distancia entre O y C, es 5 unidades y el ancho que es la distancia entre O y E, es 2 unidades, por lo tanto, el área del rectángulo es $5 \cdot 2 = 10$ unidades cuadradas, de esta manera la afirmación en II) es verdadera.

En III), para encontrar la medida del segmento AC, es necesario recordar que el eje x es perpendicular al eje y, luego el triángulo AOC es rectángulo en O, de catetos OA = 3 unidades y OC = 5 unidades y usando el teorema de Pitágoras se obtiene que $AC^2 = OA^2 + OC^2$, despejando AC en la igualdad se llega a $AC = \sqrt{34}$ unidades, luego, la afirmación en III) es verdadera.

Del desarrollo anterior se tiene que la opción correcta es E), la que fue elegida por el 14% de los estudiantes que abordaron este ítem, resultando difícil y su omisión fue de un 67%.

El distractor más marcado por los estudiantes fue C), con un 9%, quienes optan por él consideran que la afirmación en III) es falsa, esto posiblemente, porque no identifican que los ejes x e y son perpendiculares, o desconocen la fórmula para determinar la distancia entre dos puntos.